UPUTSTVO ZA OCJENJIVANJE

MATURSKI ISPIT – ANALIZA SA ALGEBROM (OSNOVNI NIVO)

24. 05. 2024. GODINA

1. Tačan odgovor: D

Kako je polinom $Q(x)=(x-1)(x+1)$ drugog stepena to ostatak mora biti oblika $R(x)=ax+b.$

Onda je $P(1)=a+b=-2$ i $P(-1)=-a+b=-6$

Rješavanjem sistema $\begin{cases} a+b=-2 \\ -a+b=-6 \end{cases}$ dobija se $b=-4$ i $a=2$.

Odnosno $R(x)=2x-4.$

2. Tačan odgovor: A

Kako je y djeljivo sa $5,$ to će dati izraz imati ostatak koji daje $3x-4$ pri dijeljenju sa $5.$

$3(5k+3)-4=5(3k+1)$, gdje je $x=5k+3, k\in Z$, pa je traženi ostatak jednak nuli.

3. Tačan odgovor: C

Imenilac razlomka se može uprostiti na sljedeći način:

$$\sqrt{\frac{3^{-4}\cdot 9^{3}\cdot 2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}}\cdot a-\sqrt[4]{64^{\frac{2}{3}}-49^{\frac{1}{2}}}\cdot b=\sqrt{\frac{3^{2}\cdot 2}{3^{2}}}\cdot a-\sqrt[4]{4^{2}-7}\cdot b=\sqrt{2}a-\sqrt{3}b$$

Koristeći dobijeni rezultat, dobija se: $\dfrac{\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}b\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}b\right)}{\sqrt{2}a-\sqrt{3}b}=\sqrt{2}a+\sqrt{3}b$

4. Tačan odgovor: B

$$x^{\log_2 x}=16 \Leftrightarrow \log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2 16,\ x>0$$

$$\left(\log_2 x\right)^2=4,\ x>0$$

$$\log_2 x=2 \quad \vee \quad \log_2 x=-2$$

$$x=2^2 \quad \vee \quad x=2^{-2}$$

$$2^2\cdot 2^{-2}=1$$

5. Tačan odgovor: B

$$\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{32}=\sum_{k=0}^{32}\binom{32}{k}\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^k\left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^{32-k}=\sum_{k=0}^{32}\binom{32}{k}2^{\frac{k}{2}-\frac{32-k}{4}}=\sum_{k=0}^{32}\binom{32}{k}2^{\frac{3k-32}{4}}$$

Da bi sabirak bio racionalnan, izraz $\frac{3k-32}{4}$ mora biti cio broj, a to je slučaj samo ako je k djeljivo sa 4.

Među brojevima $0,1,...,32$ ima 9 brojeva djeljivih sa 4, pa u razvoju ima 9 racionalnih sabiraka.

6.

Iz relacije $a^2+4b^2=8ab$ dopunom do kvadrata binoma izraza s lijeve strane, dobija se sljedeće: $(a+2b)^2=12ab$ i $(a-2b)^2=4ab$ .... 2 boda

Slijedi da je: $\frac{a+2b}{a-2b}=\frac{\sqrt{12ab}}{\sqrt{4ab}}=\sqrt{3}$ .... 1 bod

7.

Određen NZS za razlomke u brojiocu i imeniocu, posebno:

$$\frac{\frac{\left(x+y\right)^2}{x+y}-\frac{4xy}{x+y}}{\frac{x^2-xy+xy+y^2-2xy}{x^2-y^2}}=$$ .... 2 boda

$$\frac{\frac{(x-y)^2}{x+y}}{\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}} = x-y$$ .... 1 bod

gdje je $x \neq \pm y$ .... 1 bod

8.

Primjenom Vietovih formula za jednačinu $x^2+x+1=0$ dobija se:

$x_1+x_2=-1,\ x_1 \cdot x_2 = 1$ .... 1 bod

Kako je $A=1$ u jednačini $y^2+By+C=0$ to je:

$-\frac{B}{A} = ax_1+x_2+x_1+ax_2 = -1-a$ .... 1 bod

$\frac{C}{A} = (ax_1+x_2)(x_1+ax_2) = a\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)+a^2+1 = a^2-a+1$ .... 1 bod

Tražena jednačina je oblika $y^2+(a+1)y+a^2-a+1=0$

pa je zbir koeficijenata $1+a+1+a^2-a+1=3+a^2$ .... 1 bod

9.

$$\frac{x^3+x^2}{x^2+4x+3} > \frac{x^2}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2(x+1)}{x^2+4x+3} - \frac{x^2}{3} > 0,\ x \neq -1,\ x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} - \frac{x^2}{3} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}\right) > 0$$ .... 2 boda

$$\Leftrightarrow \frac{3-x-3}{3(x+3)} > 0,\ x \neq -1,\ x \neq 0,\ x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{x+3} > 0$$ .... 1 bod

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-3,0),\ x \neq -1,\ x \neq 0,\ x \neq -3$$

$x \in (-3,-1) \cup (-1,0)$ .... 2 boda

10.

$2^{4x}+3^{4x}=13\cdot 6^{2x-1}$

$2^{4x}+3^{4x}=13\cdot 2^{2x-1}\cdot 3^{2x-1} \,/ : 2^{2x}\cdot 3^{2x}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\frac{13}{6}$ .... 1 bod

Smjena $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=t,\, t>0$ .... 1 bod

$t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6}$

$6t^2+6-13t=0$

$t_{1/2}=\frac{13\pm 5}{12}$,

$t_1=\frac{3}{2}$, $\quad t_2=\frac{2}{3}$ .... 1 bod

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{3}{2} \vee \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3}$

$x=-\frac{1}{2} \vee x=\frac{1}{2}$ .... 1 bod

11.

Domen date funkcije je presjek skupova rješenja sljedećih nejednačina:

$-x^2+6x-7>0,\quad log_2(-x^2+6x-7)>0,\quad 3x-9>0,\quad 3x-9\neq 1$ .... 1 bod

Prve dvije nejednačine ekvivalentne su sa rješenjem nejednačine $-x^2+6x-8>0$,

pa je $x\in(2,4)$ .... 1 bod

Treći i četvrti uslov daju $x\in\left(3,\frac{10}{3}\right)\cup\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$ .... 1 bod

Domen funkcije je $x\in\left(3,\frac{10}{3}\right)\cup\left(\frac{10}{3},4\right)$ .... 1 bod

12.

$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{b_1}{1-q} = \frac{4}{3}$ .... 1 bod

$\sqrt{b_1} + \sqrt{b_1 q} + \sqrt{b_1 q^2} + ... = 2$

$\Rightarrow \sqrt{b_1}\left(1 + \sqrt{q} + \left(\sqrt{q}\right)^2 + \left(\sqrt{q}\right)^3 + ...\right) = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{b_1}}{1-\sqrt{q}} = 2$ .... 1 bod

Iz sistema: $\begin{cases} 3b_1 = 4 - 4q \\ \sqrt{b_1} = 2 - 2\sqrt{q} \end{cases}$ slijedi: $4 - 4q = 3\left(2 - 2\sqrt{q}\right)^2$

$4 - 4q = 12\left(1 - 2\sqrt{q} + q\right)$ .... 1 bod

Smjena: $\sqrt{q} = t$ .... 1 bod

$12 - 24t + 12t^2 = 4 - 4t^2$

$16t^2 - 24t + 8 = 0$

$2t^2 - 3t + 1 = 0$

$t_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{4}$, $t_1 = 1$ $t_2 = \frac{1}{2}$ .... 1 bod

$q = 1\left(\perp\right)$ $q = \frac{1}{4}$ .... 1 bod

13.

Nema vertikalnih asimptota.. 1 bod

$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + e^x\right) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} \ln\left(1 + e^x\right) = 0$

Horizontalna asimptota $y = 0$ kad $x \to -\infty$ .... 1 bod

Ispitujemo da li ima kosih asimptota kad $x \to +\infty$.

$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + e^x\right)}{x} \overset{l.p.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} \overset{l.p.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ .... 1 bod

$n = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(1 + e^x\right) - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(e^x\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)\right) - x\right) =$

$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) - x\right) = 0$ .... 1 bod

Prava $y = x$ je kosa asimptota grafika funkcije kad $x \to +\infty$ .... 1 bod

14.

$l = l_1 + l_2 + l_3$

$l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n +1} = 3$ .... 1 bod

$l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sin(n\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 0 = 0$ .... 1 bod

$l_3 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-1 \,/ : n}{\sqrt{n^2+1}+1 \,/ : n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}} = 1$ .... 1 bod

$l = 4$ .... 1 bod

15.

$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$ .... 2 boda

$\frac{\pi}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ .... 2 boda