



ISPITNI
CENTAR
DRŽAVNO
TAKMIČENJE 2024.

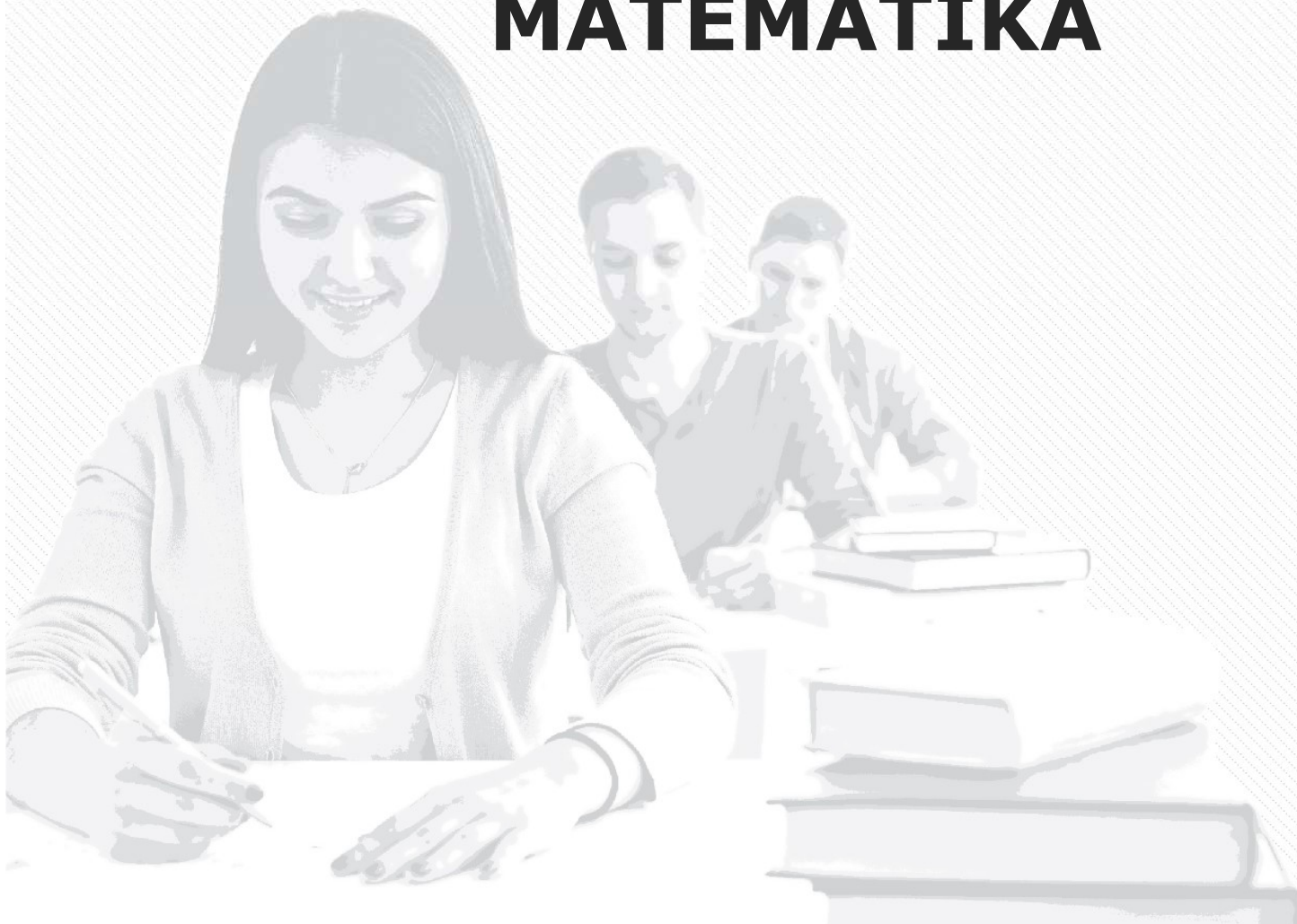
AUTOR/AUTORKA TESTA _____

RECENZENT/RECENZENTKINJA _____

PODGORICA, _____ 20__ GODINE

OSNOVNA ŠKOLA, VI RAZRED

MATEMATIKA



UPUTSTVO ZA RAD

Drage učenice i učenici,

Čestitamo! Uspjeli ste da dođete na državno takmičenje iz matematike i samim tim ste već napravili veliki uspjeh. Zato zadatke koji su pred vama posmatrajte kao interesantne probleme i potrudite se da ih rješavate s punom pažnjom i zalaganjem, ali i sa uživanjem.

Redoslijed izrade zadataka nije bitan. Ako vam je neki zadatak suviše težak, nemojte se na njemu dugo zadržavati, već pređite na sljedeći. Ukoliko vam bude preostalo vremena, vratite se i pokušajte uraditi zadatke koje niste rješavali.

Pišite čitko, naročito brojeve! Sve odgovore detaljno obrazložite!

Radite samostalno. Nijesu dozvoljena nikakva dogovaranja.

U radu možete koristiti geometrijski pribor, grafitnu olovku, gumicu i plavu ili crnu hemijsku olovku, ali nije dozvoljena upotreba mobilnih telefona, kalkulatora i bilo kojih drugih elektronskih pomagala.

Za svaki zadatak je predviđeno po 25 bodova.

Za rad imate 180 minuta.

Počnite sa radom.

Srećno!

1. U Podgorici se otvara nova prodavnica tehnike. Da bi privukli što veći broj kupaca vlasnici prodavnice su organizovali nagradnu igru. Naime, na dan otvaranja svakom 10. kupcu daruju slušalice, svakom 12. bežični zvučnik i svakom 25. mobilni telefon. Jedan kupac može dobiti tri nagrade odjednom. Ispred prodavnice je red kupaca koji čekaju otvaranje. Hana i Zorana žele da osvoje po tri nagrade. Na koje dvije pozicije u redu ispred prodavnice treba da stoje tako da i jedna i druga dobiju sve tri nagrade a da provedu što manje vremena čekajući?

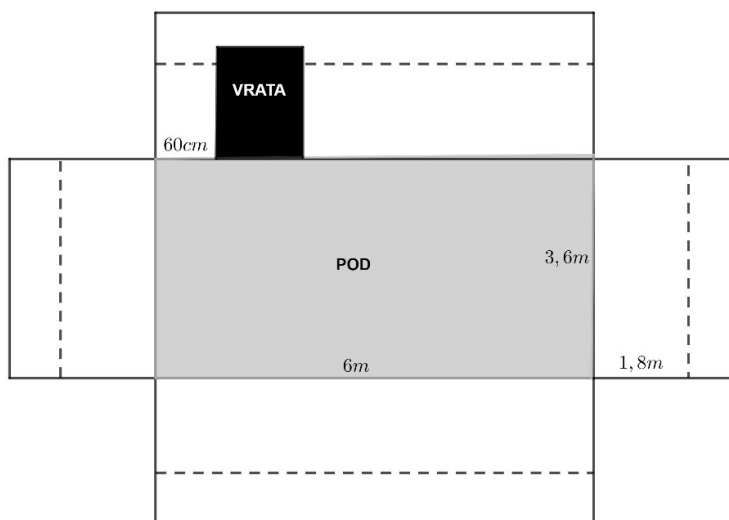
RJEŠENJE:

Identifikujmo redom na kojim pozicijama kupci dobijaju svaku od nagrada:

- Slušalice: pozicije djeljive sa 10 (10, 20, 30, ...)
- Bežični zvučnik: pozicije djeljive sa 12 (12, 24, 36, ...)
- Mobilni telefon: pozicije djeljive sa 25 (25, 50, 75, ...)

Sve tri nagrade dobijaju kupci na pozicijama djeljivim sa 10, 12 i 25 istovremeno. Kako je $NZS(10,12,25)=300$, sve tri nagrade dobiće kupci na pozicijama 300, 600, 900 itd. Dakle, Hana i Zorana treba da stoje na pozicijama 300 i 600.

2. Majstor Zoran je odlučio da renovira svoju kuhinju i zamjeni stare pločice. Njegova kuhinja je dugačka 6m i široka 3,6m, dok je visina plafona 2,4 m. Stare pločice su kvadratnog oblika dužine stranice 15 cm i pokrivaju pod i zidove do tri četvrtine visine plafona, izuzev vrata koja su široka 120cm i visoka 2m. Vrata su od najbližeg ćoška udaljena 60cm kao na slici. On je planirao da kupi dvije nove vrste pločica, jedne za pod a druge za zidove i prekrije istu površinu koju su prekrivale stare pločice. Za podne pločice je odabrao dimenzije 20 cm×10 cm, a za zidne dimenzije 18 cm×12 cm. Cijena podnih pločica je 17 eura po metru kvadratnom, dok je cijena zidnih pločica 23 eura po metru kvadratnom. Koliko starih pločica se nalazi u kuhinji? Koliko podnih a koliko zidnih pločica Zoran treba da kupi i koliko će novca potrošiti?



RJEŠENJE:

Prvo odredimo površinu pokrivenu starim pločicama. Cijeli pod je pokriven pločicama i njegova površina je jednaka $3,6m \cdot 6m = 21,6m^2 = 216000cm^2$. Visina plafona je 2,4m a pločice su postavljene do tri četvrtine visine tj. do 1,8m. Površina dijela zidova pokrivenih pločicama je jednaka (pogledati sliku)

$$2 \cdot 6m \cdot 1,8m + 2 \cdot 3,6m \cdot 1,8m - 1,2m \cdot 1,8m = 32,4m^2 = 324000cm^2$$

Ukupna površina pokrivena pločicama je jednaka $216000cm^2 + 324000cm^2 = 540000cm^2$. Jedna stara kvadratna pločica pokriva površinu od $15cm \cdot 15cm = 225cm^2$, što znači da je ukupan broj starih pločica jednak $540000cm^2 : 225cm^2 = 2400$.

Jedna nova podna pločica pokriva površinu od $20cm \cdot 10cm = 200cm^2$, što znači da je potrebno kupiti $216000cm^2 : 200cm^2 = 1080$ komada tih pločica. Jedna nova zidna pločica pokriva površinu od $18cm \cdot 12cm = 216cm^2$ pa je potrebno kupiti $324000cm^2 : 216cm^2 = 1500$ komada takvih pločica.

Cijena podnih pločica je 17 eura po kvadratu a površina poda je $21,6m^2$, što znači da će za podne pločice Zoran potrošiti $21,6m^2 \cdot 17€/m^2 = 367,2€$. Istim postupkom dobijamo da će za zidne pločice potrošiti $32,4m^2 \cdot 23€/m^2 = 745,2€$. Dakle, Zoran će ukupno potrošiti $367,2€ + 745,2€ = 1112,4€$.

3. U sljedećem šifriranom zapisu

$$\begin{array}{r} Z A D A C I \\ + Z U D A C I \\ + Z I D A C I \\ + Z T T A C I \end{array}$$

slova Z, A, D, C, I, U i T predstavljaju 7 različitih cifara i važi $Z \neq 0$. Odrediti vrijednosti slova tako da dobijeni zbir u šifriranom zapisu bude najmanji mogući a zatim izračunati taj zbir.

RJEŠENJE:

Pošto vrijednost zbira treba da bude najmanja onda je za Z potrebno odabrati minimalnu moguću vrijednost. Po uslovu zadatka Z ne može biti 0 zato biramo $Z=1$. Slova A, U, I i T se nalaze na poziciji desetina hiljada brojeva koje sabiramo. Osim toga slovo T se takođe nalazi na poziciji hiljada jednog od brojeva, slovo A na poziciji stotina svakog od brojeva i slovo I na poziciji jedinica svih brojeva.

Zbog navedenog da bi zbir bio najmanji treba odabrati $T=0$, $A=2$, $I=3$ i $U=4$. Kako se D nalazi na poziciji hiljada kod tri broja a C na poziciji desetica kod svakog od brojeva, onda treba odabrati $D=5$ i $C=6$. Traženi zbir jednak je 506052.

4. Bibliotekar je naišao na čudnu knjigu čije su stranice pogrešno numerisane. Stranice su numerisane tako da se svi brojevi pojavljuju po dva puta: 1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 6, itd. Ako je poznato da je u nepravilnom numerisanju iskorišćeno 816 cifara, odrediti koji broj će pisati na posljednjoj stranici knjige nakon što bibliotekar ispravi grešku i pravilno numerise knjigu.

RJEŠENJE:

Jednocifrenih brojeva ima 9 pa smo "duplim" numerisanjem iskoristili 18 cifara. Dvocifrenih brojeva ima 90 i pošto svaki koristimo dva puta, iskoristili smo još $2 \cdot 180 = 360$ cifara. Kako je $816 - 360 - 18 = 438$, ostalo je još 438 cifara za numerisanje trocifrenih brojeva. Pošto je $438 : 3 = 146$, to je u pogrešnoj numeraciji napisano 146 trocifrenih brojeva tj. $146 : 2 = 73$ duplikata trocifrenih brojeva (brojevi od 100 do 172). Posljednji trocifreni broj koji je upisan je 172, što znači da će u tačnoj numeraciji na posljednjoj stranici pisati $172 \cdot 2 = 344$.