ISPITNI CENTAR

# DRŽAVNO TAKMIČENJE 2024.

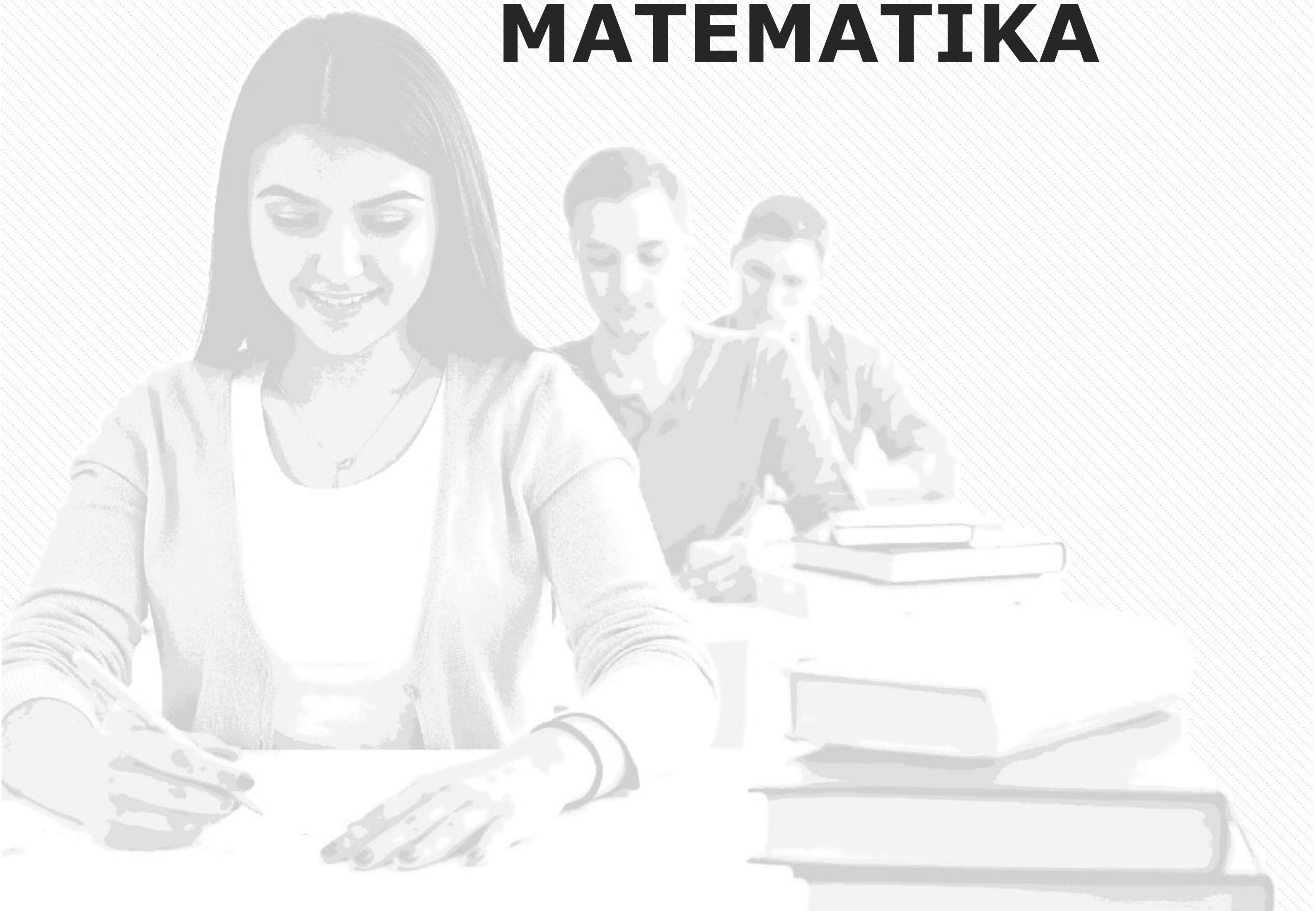
AUTOR/AUTORKA TESTA _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

RECENZENT/RECENZENTKINJA _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

PODGORICA, _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 20_ _ _ GODINE

## OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

# MATEMATIKA



# <u>UPUTSTVO ZA TAKMIČARE</u>

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

| **Zadatak** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.** |
|---|---|---|---|---|
| **Maksimalan broj poena** | **25** | **25** | **25** | **25** |

- Pribor za rad: **geometrijski pribor, grafitna olovka, gumica i plava ili crna hemijska olovka.**

**SREĆNO!**

# ZADACI

**1.** Neka su $x, y$ pozitivni brojevi i neka je $x > y$. Neka je $z = \frac{x+y}{2}$ i $t = \sqrt{xy}$. Ako je $x + \frac{3}{2}y = 3(z - t)$, izračunati $\frac{x}{y}$.

**2.** Naći sve prirodne brojeve $x, y$ i $z$, takve da je $x \leq y$, koji zadovoljavaju jednačinu $x! + y! = 2^z$. (Ako je n prirodan broj, tada je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

**3.** Prije odmora, nastavnik je na tabli ispisao devet uzastopnih prirodnih brojeva. Za vrijeme odmora, dežurni učenik je greškom obrisao jedan od tih brojeva. Zbir preostalih brojeva na tabli je 1703. Koji broj je obrisan?

**4.** Na stranici $CD$ kvadrata $ABCD$ izabrana je tačka $E$. Simetrala ugla $\angle BAE$ siječe stranicu $BC$ u tački $F$. Dokazati da je $AE = BF + ED$.

# RJEŠENJA ZADATAKA

**1.** Jednačinu možemo zapisati u obliku

$$x+\frac{3}{2}y=3\left(\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right)$$

Podijelimo i lijevu i desnu stranu jednakosti sa $y$, i dobijamo

$$\frac{x}{y}+\frac{3}{2}=3\left(\frac{\frac{x}{y}+1}{2}-\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

Označimo $\frac{x}{y}=r$, dobijamo

$$r+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}r+\frac{3}{2}-3\sqrt{r}$$

Odavde je $3\sqrt{r}=\frac{1}{2}r$, odnosno $\sqrt{r}=6$, pa je $r=36$.

**2.** Ako je $x=y$, dobijamo $2x!=2^z$, pa je $x!=2^{z-1}$. Ovo je moguće samo ako je $x=1$ ili $x=2$. Dakle, dva rješenja su
$x=1, y=1, z=1$ i $x=2, y=2, z=2$.
Ako je $x<y$ važi
$x!+y!=x!\cdot(1+(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot y)=2^z$.
Zaključujemo da je broj $2^z$ djeljiv sa $x!$, pa je $x!=2^m$. Dakle, jedine opcije su $x=1$ i $x=2$.
Ako je $x=1$, tada je $1+y!=2^z$, odnosno $y!=2^z-1$. Dakle, $y!$ je neparan broj, što je nemoguće kada je $y>1$.
Ako je $x=2$, tada je $1+3\cdot 4\cdot\ldots\cdot y=2^z$, odnosno $3\cdot 4\cdot\ldots\cdot y=2^z-1$, pa je broj $3\cdot 4\cdot\ldots\cdot y$ neparan, što je moguće samo ako je $y=3$. Dakle, i $x=2, y=3, z=3$ je rješenje jednačine.

**3.** Pretpostavimo da je nastavnik na tabli ispisao brojeve $a-4, a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3, a+4$. Neka je broj koji je izbrisan $a+b$, gdje je $-4\leq b\leq 4$. Tada je zbir preostalih brojeva $9a-(a+b)=8a-b$. Sa druge strane, $1703=8\cdot 213-1$, pa je $8\cdot 213-1=8a-b$. Dobijamo $8\cdot(213-a)=b-1$, pa je broj $b-1$ djeljiv sa 8, i nalazi se između -5 i 3. Jedini takav broj je 0, pa je $b-1=0$, odnosno $b=1$, a $a=213$. Dakle, izbrisan je broj $213+1=214$.

**4.** Na polupravoj $CD$ izaberimo tačku $G$ takvu da je $DG=BF$. Tada je

$$EG=ED+BF.$$

Kako je tačka $F$ na simetrali $\angle EAB$, to je $\angle BAF = \angle FAE = \alpha$ . Trouglovi $\Delta ABF$ i $\Delta ADG$ su podudarni ($AB = AD, BF = DG, \angle ABF = \angle ADG = 90°$, stav SUS), pa je $\angle BAF = \angle DAG = \alpha$. Dalje je $\angle EAG = \angle EAD + \angle DAG = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha$, a pored toga je $\angle AGE = \angle AFB = 90° - \alpha$. Dakle, trougao $\Delta EAG$ je jednakokraki trougao sa čija je osnovica $AG$, pa je

$$AE = EG = ED + BF.$$