ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2023.

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

Autorka/autor testa ....

Recenzentkinja/recenzent ....

Podgorica, ... 20......... godine

ZADACI

1. a) Određenu svotu novca moramo podijeliti grupi djece tako da svako dijete dobije istu količinu novca. Ako bi imali 20 centi više, svakom djetetu bi mogli dati po 70 centi. Ako svakom djetetu damo po 60 centi, ostaje nam 2 evra i 10 centi. Koliko je djece u grupi?

b) Za prirodan broj n važi da je NZD(400, n)=8 i NZD(400, n+1)=5. Odredi NZD(400, n+2). (Napomena: sa NZD(a, b) označavamo najveći zajednički djelilac brojeva a i b.)

2. Riješi jednačinu

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=n^2$$

za proizvoljan prirodan broj n veći od 1.

3. Kružnica *k* sadrži tjeme kod pravog ugla C i sredinu hipotenuze AB pravouglog trougla ABC. *k* siječe katete AC i BC u tačkama M i N, redom, i važi AB=2MN. Dokazati da su tačke M i N sredine kateta AC i BC.

4. Na turniru u tenisu je učestvovalo n igrača. Svaki igrač je odigrao po jedan meč sa svakim od ostalih igrača. Mečeve je sudilo ukupno k sudija, tako da je svaki meč sudio po jedan sudija. Takođe, poznato je da ne postoje dvojica sudija koji su sudili isti broj mečeva.

a) Dokazati da je $k \leq n-1$.

b) Igrač Marko tvrdi da su sve njegove mečeve sudile različite sudije. Isto tvrde igrači Darko i Žarko. Da li je moguće da su tačne tvrdnje Marka, Darka i Žarka, ili da neko od njih ipak pogriješio? (Odgovor obrazložiti. Odgovor bez obrazloženja se boduje sa 0 bodova.)

RJEŠENJA ZADATAKA

1. a) Neka je u grupi x djece, i neka mi imamo n centi. Iz prvog uslova imamo da je n+20=70x, odnosno n=70x-20. Drugi uslov nam daje n-210=60x, odnosno n=60x+210. Dobijamo 70x-20=60x+210, odnosno 10x=230. Odavde je x=23, pa u grupi ima 23-oje djece.

b) Primijetimo da je $400 = 2^4 \cdot 5^2$. Kako je NZD(400, n)=8, primijetimo da je broj n djeljiv sa 8, a kako su n i n+2 uzastopni parni brojevi, n+2 mora biti djeljiv sa 2, a ne i sa 4, 8 i 16. Kako je NZD(400, n+1)=5, zaključujemo da je n+1 djeljiv sa 5, a kako su n+1 i n+2 uzastopni brojevi, zaključujemo da n+2 nije djeljiv sa 5. Dakle, NZD(400, n+2)=2.

2. Rješenje 1:

Uvedimo smjenu $\sqrt{x+\frac{1}{4}} = t$. Primijetimo da je $t > 0$ i da je $x = t^2 - \frac{1}{4}$. Jednačina postaje:

$$t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{4} + t} = n^2$$

odnosno

$$t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = n^2$$

pa je

$$t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2} = n^2.$$

Kako je $t + \frac{1}{2} > 0$ imamo

$$t^2 - \frac{1}{4} + t + \frac{1}{2} = n^2$$

odnosno

$$t^2 + t + \frac{1}{4} = n^2.$$

Opet imamo $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2$, pa je $t + \frac{1}{2} = n$, odnosno $t = n - \frac{1}{2}$.

Sada, $x = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = n^2 - n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$. Dakle, $x = n^2 - n$.

Rješenje 2:

Primijetimo da je

$$x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = (\sqrt{x + \frac{1}{4}})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Kako je $\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$ pozitivan broj, zaključujemo da je

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=x+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=n^2.$$

Kako je n pozitivan broj, odavde zaključujemo da je

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=n$$

odnosno

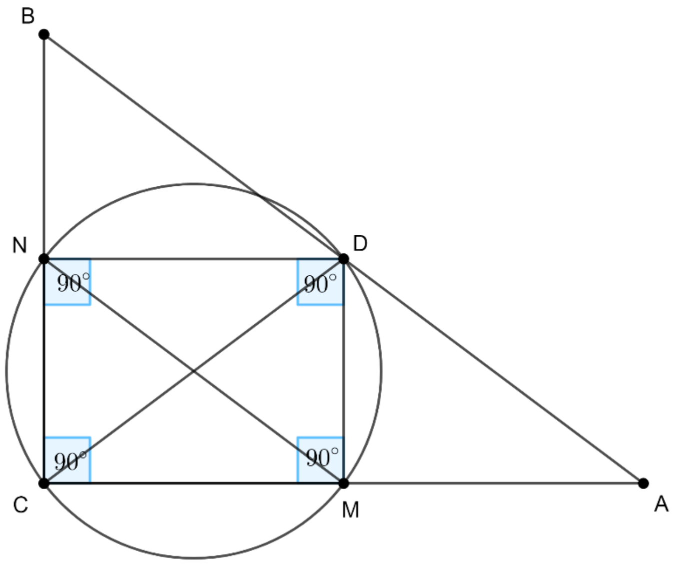
$$\sqrt{x+\frac{1}{4}}=n-\frac{1}{2}.$$

Kvadriranjem izraza dobijamo

$$x+\frac{1}{4}=n^2-n+\frac{1}{4}$$

pa je $x=n^2-n$.

3. Označimo sredinu hipotenuze AB sa D. Primijetimo da je $\angle MCN=90°$ periferni ugao nad tetivom MN, pa je MN prečnik kružnice k. Posto je D sredina hipotenuze pravouglog trougla, to je $CD=\frac{AB}{2}=MN$, pa je i CD prečnik kružnice k. Dalje, imamo $\angle CMD=90°$ i $\angle CND=90°$, kao periferni uglovi nad prečnikom CD. Sada možemo zaključiti da su MD i ND srednje linije trougla ABC, pa su tačke M i N sredine kateta AC i BC.



4. a) Poređajmo sudije u red na osnovu broja mečeva koje su sudili, od manjeg ka većem. Prvi sudija je sudio m_1 mečeva, drugi m_2, ..., posljednji m_k, i važi $m_1<m_2<...<m_k$. Očigledno je $m_1\geq 1$, $m_2\geq 2,...,m_k\geq k$. Oni su ukupno sudili $m_1+m_2+...+m_k$ mečeva. Ukupno je odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ mečeva. Dakle, imamo

$$\frac{n(n-1)}{2}=m_1+m_2+\cdots+m_k\geq 1+2+\cdots+\mathrm{k}=\frac{k(k-1)}{2}$$

pa je n-1≥k.

b) Ako je Marko utvrdio da su svaki njegov meč sudile različite sudije, a on je odigrao n-1 mečeva, znači da je k≥n-1. Kako smo u prvom dijelu zadatka dokazali da je k≤n-1, mora važiti k=n-1, tj. na turniru je tačno n-1 sudija. Dalje, zaključujemo da je prvi sudija sudio tačno 1 meč, drugi tačno 2 meča, ..., posljednji tačno n-1 mečeva. Kako je prvi sudija sudio tačno 1 meč, a u meču učestvuju dva igrača, on je mogao suditi samo u jednom od mečeva Marko-Darko, Marko-Žarko i Darko-Žarko, pa samo dvojica od njih mogu tvrditi da je svaki njihov meč sudio različit sudija. Dakle, jedan od njih je pogriješio.