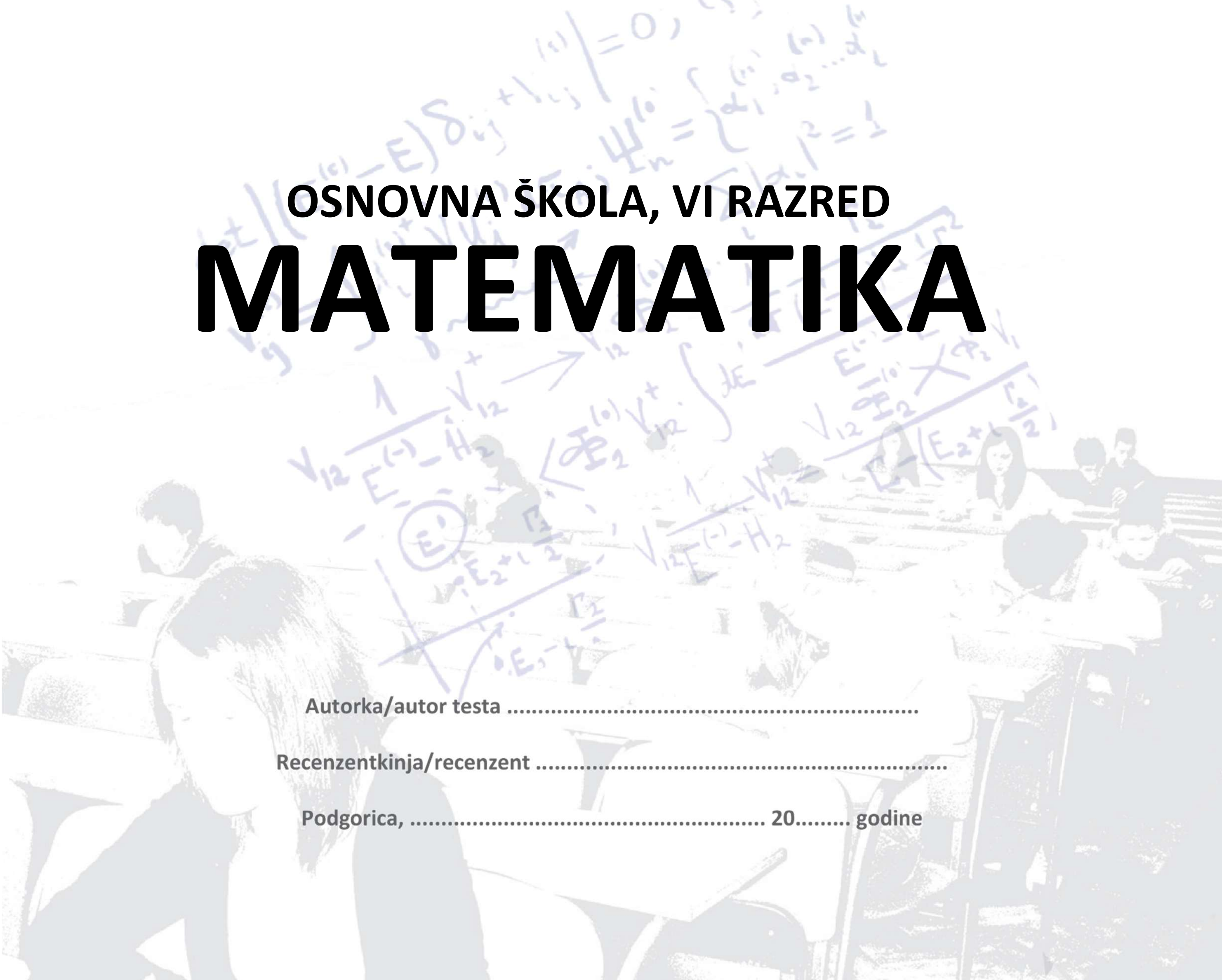
ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2023.



OSNOVNA ŠKOLA, VI RAZRED

MATEMATIKA

Autorka/autor testa ....

Recenzentkinja/recenzent ....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA RAD

Drage učenice i učenici,

Čestitamo! Uspjeli ste da dođete na državno takmičenje iz matematike i samim tim ste već napravili veliki uspjeh. Zato zadatke koji su pred vama posmatrajte kao interesantne probleme i potrudite se da ih rješavate s punom pažnjom i zalaganjem, ali i sa uživanjem.

Redoslijed izrade zadataka nije bitan. Ako vam je neki zadatak suviše težak, nemojte se na njemu dugo zadržavati, već pređite na sljedeći. Ukoliko vam bude preostalo vremena, vratite se i pokušajte uraditi zadatke koje nijeste rješavali.

Pišite čitko, naročito brojeve!

Radite samostalno. Nijesu dozvoljena nikakva dogovaranja.

U radu možete koristiti geometrijski pribor, grafitnu olovku, gumicu i plavu ili crnu hemijsku olovku, ali nije dozvoljena upotreba mobilnih telefona, kalkulatora i bilo kojih drugih elektronskih pomagala.

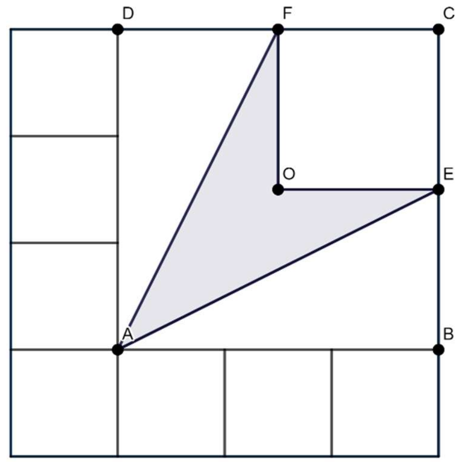
Za svaki zadatak je predviđeno po 25 bodova.

Za rad imate 180 minuta.

Počnite sa radom.

Srećno!

1. **Kvadrat nepoznatih dimenzija je podijeljen na kvadrat ABCD i 7 manjih jednakih kvadrata kao na slici. Tačke E i F su sredine duži BC i CD redom, dok je O centar kvadrata ABCD. Ako je poznato da je površina osjenčenog dijela jednaka $36\ cm^2$, odrediti površinu manjih kvadrata.**



RJEŠENJE:
Označimo sa a dužinu stranice kvadrata OECF. Pošto su tačke E i F središta stranica BC i CD i O centar kvadrata, zaključujemo da je ABCD kvadrat čija je dužina stranice jednaka $2a$. Dakle, površine kvadrata OECF i ABCD su a^2 i $(2\mathrm{a})^2$, redom. Primjetimo da je zbir površina trouglova ΔABE i ΔADF jednak površini pravougaonika dimenzija $2a$ i a.

Površina osjenčenog dijela se dobija kada se od površine kvadrata ABCD oduzme površina kvadrata OECF i zbir površina trouglova ΔABE i ΔADF tj.

$$(2\mathrm{a})^2 - (\mathrm{a}^2 + 2a \cdot a) = 36cm^2$$
$$4a^2 - 3a^2 = 36cm^2 \Rightarrow a^2 = 36cm^2$$

Površina kvadrata ABCD je jednaka $(2a)^2 = 4a^2 = 4 \cdot 36cm^2 = 144cm^2$. Dužina stranice bilo kog od manjih kvadrata je 3 puta manja od dužine stranice kvadrata ABCD , pa je njegova površina 9 puta manja od površine kvadrata ABCD. Zaključujemo da je tražena površina $\frac{144cm^2}{9} = 16cm^2$.

2. Odrediti sve trocifrene brojeve koji se smanje 13 puta kada im se ukloni cifra desetica.

RJEŠENJE:

Neka je $\overline{ABC}$ traženi broj. Po uslovu zadatka važi

$$\overline{ABC} = 13\overline{AC}$$
$$100\mathrm{A} + 10\mathrm{B} + \mathrm{C} = 13(10\mathrm{A} + \mathrm{C})$$
$$100\mathrm{A} + 10\mathrm{B} + \mathrm{C} = 130\mathrm{A} + 13\mathrm{C}$$
$$10\mathrm{B} = 30\mathrm{A} + 12\mathrm{C}$$
$$10\mathrm{B} - 30\mathrm{A} = 12\mathrm{C}$$

Brojevi $10\mathrm{B}$ i $30\mathrm{A}$ su djeljivi sa 5 pa je onda i $12\mathrm{C}$ djeljivo sa 5. Dakle, broj C može biti 0 ili 5.

Razmotrimo slučaj kad je $C = 0$. Tada se prethodna jednačina transformiše u $10\mathrm{B} - 30\mathrm{A} = 0$ tj. $\mathrm{B} = 3\mathrm{A}$. Cifra A je cifra stotina pa nije jednaka 0. Moguće je da je A jedanko $1, 2$ ili 3, iz kojih se dobijaju brojevi $130, 260$ i 390. Cifra A ne može biti veća od 3 jer bi onda B bilo veće od 10.

Neka je sada $C = 5$. Gore izvedena jednačina postaje $10B - 30A = 60$ tj. $B = 3A + 6$. Jedino je moguće da je $A = 1$, odakle dobijamo broj 195. Cifra A ne može biti veća od 1 jer bi onda B bilo veće od 10.

Dakle, traženi brojevi su $130, 260, 390$ i 195.

3. Sličice za album su numerisane brojevima od 1 do 10 000. Ana je sakupila sve sličice koje su numerisane brojevima čija je cifra jedinica 5, dok je Marko sakupio sličice koje su numerisane brojevima koji su djeljivi sa 21 ali nijesu djeljivi sa 10. Ko je sakupio više sličica i za koliko?

RJEŠENJE:

Da bi odredili koliko je Ana sakupila sličica, potrebno da je odredimo koliko ima brojeva manjih od $10\,000$ čija je cifra jedinica jednaka 5.

Brojevi čija je cifra jedinica jednaka 5 su brojevi koji su djeljivi sa 5 ali nijesu djeljivi sa 10. Ukupan broj brojeva djeljivih sa 5 koji su $\leq 10\,000$ je $\frac{10000}{5} = 2000$, dok brojeva $\leq 10\,000$ koji su djeljivi sa 10 ima $\frac{10000}{10} = 1000$. Dakle, Ana je sakupila $2000 - 1000 = 1000$ sličica.

Odredimo sada koliko sličica je sakupio Marko. Potrebno je odrediti koliko ima brojeva manjih od $10\,000$ koji su djeljivi sa 21 ali ne i sa 10. Dijeljenem $10\,000$ sa 21 dobijamo količnik 476 i ostatak 4. Dakle, brojeva $\leq 10\,000$ koji su djeljivi sa 21 ima 476. Međutim, među njima postoje oni koji su djeljivi sa 10 pa njih treba eliminisati, tj. od tog broja treba oduzeti brojeve koji su istovremeno djeljivi sa 10 i 21 . Da bi broj bio djeljiv istovremeno sa 10 i 21, on mora biti djeljiv sa 210, takvih brojeva ima 47 (jer je $10\,000: 210 = 47\ \ (130)$). Dakle, Marko je sakupio $476 - 47 = 429$.

Ana je sakupila $1000 - 429 = 571$ sličicu više od Marka.

4. Prirodan broj nazivamo „dobrim“ ako ima najmanje dvije cifre i brisanjem neke njegove cifre nastaje broj koji je jednak zbiru cifara početnog broja. Na primjer, brojevi 109 i 917 su „dobri“. Naime, kod broja 109 uklanjanjem cifre jedinica nastaje broj 10 i važi da je 10=1+0+9, dok kod broja 917 uklanjanjem cifre stotina nastaje broj 17 i važi da je 17=9+1+7. Odrediti broj „dobrih“ brojeva manjih od 10000.

RJEŠENJE:

Razmotrimo prvo dvocifrene brojeve. Pretpostavimo da je $\overline{AB}$ „dobar“. Tada su moguće dvije opcije:

(1) Brisanjem cifre A nastaje broj B i važi

$$B = A + B \Rightarrow A = 0.$$

Ovaj slučaj nije moguć jer je A cifra desetica.

(2) Brisanjem cifre B nastaje broj A i važi

$$A = A + B \Rightarrow B = 0.$$

Dobijamo brojeve $\{10, 20, 30, 40, 50\ , 50, 70,\ \ 80\ ,90\}$.

Zaključujemo da dvocifrenih brojeva sa traženih svojstvom ima 9.

Razmotrimo sada trocifrene brojeve. Pretpostavimo da je broj $\overline{ABC}$ „dobar“. Tada su moguće tri opcije:

(1) Brisanjem cifre A nastaje broj $\overline{BC}$ i važi

$$\overline{BC} = A + B + C$$
$$10B + C = A + B + C \Rightarrow A = 9B.$$

Jedina validna mogućnost za cifre $A\ i\ B$ je $B = 1$ i $A = 9$. Dobijamo brojeve $\overline{91C}$, $C \epsilon \{0,1,2, \dots ,9\}$.

(2) Brisanjem cifre B nastaje broj $\overline{AC}$ i važi

$$\overline{AC} = A + B + C$$
$$10A + C = A + B + C \Rightarrow B = 9A.$$

Jedina validna mogućnost za A i B je $A = 1$ i $B = 9$. Dobijamo brojeve $\overline{19C}$, $C \epsilon \{0,1,2, \dots ,9\}$.

(3) Brisanjem cifre C nastaje broj $\overline{AB}$ i važi

$$\overline{AB} = A + B + C$$
$$10A + B = A + B + C \Rightarrow C = 9A.$$

Jedina validna mogućnost za cifre A i C je $A = 1$ i $C = 9$. Dobijamo brojeve $\overline{1B9}$, $B \epsilon \{0,1,2, \dots ,9\}$.

Zaključujemo da trocifrenih brojeva sa traženih svojstvom ima 29.

Ne postoji četvorocifren broj $\overline{ABCD}$ koji je „dobar“, jer uklanjanem jedne njegove cifre nastaje trocifren broj, a zbir $A + B + C + D$ ne može biti jednak četvorocifrenom broju. Dakle, „dobrih“ brojeva ≤ 10000 ima $9 + 29 = 38$.