ispitni centar
PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2023.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA, I i II RAZRED

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: 240 minuta.
- Rješenja zadataka neophodno je detaljno obrazložiti. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	1.	2.	3.	4.
Maksimalan broj poena	25	25	25	25

- Pribor za rad: geometrijski pribor, grafitna olovka, gumica i plava ili crna hemijska olovka.

SREĆNO!

ZADACI

1. Dokazati da jednačinu $(m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3 = 6^n$, ne zadovoljava nijedan par prirodnih brojeva (m, n), ako je $n \geq 4$. Da li za $n < 4$ data jednačina ima rješenja?

2. Neka je ABC oštrougli trougao i neka su CE, BD i AP visine datog trougla. Kružnica sa prečnikom DE siječe duži AB i AC u tačkama F i G, redom. Neka je K tačka presjeka duži FG i AP i neka je $BC = 25$, $BD = 20$ i $BE = 7$. Izračunati dužinu duži AK.

3. Niz $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, \ldots$ je formiran tako što su najprije napisane jedinice, a zatim je između prve i druge jedinice umetnuta jedna dvojka, između druge i treće jedinice umetnute su dvije dvojke, između treće i četvrte umetnute su tri dvojke itd. Ako je sa a_n označen n-ti član niza, izračunati zbir $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{2023}a_{2024}$.

4. Neka su x, y i z dužine stranica trougla. Dokazati da važi nejednakost

$$8(x^2 + yz)(y^2 + xz)(z^2 + xy) > (x^2 + y^2 + z^2)^3.$$

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Pretpostavimo da postoji par (m, n), $n \geq 4$, koji zadovoljava datu jednačinu. Kako je 6^n paran broj, to slijedi da je i m paran. Dakle, $m = 2k$ za neki prirodan broj k.
Dobijamo

$$\begin{aligned} 6^n &= (2k-1)^3 + (2k)^3 + (2k+1)^3 \\ &= 12k(2k^2+1) \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot k(2k^2+1). \end{aligned}$$

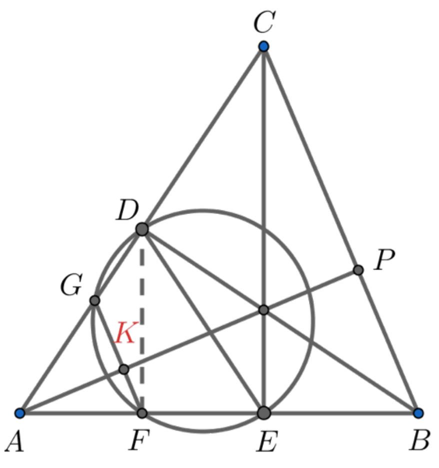
Slijedi, $2^{n-2} \cdot 3^{n-1} = k(2k^2+1)$. Brojevi k i $2k^2+1$ su očigledno uzajamno prosti, pa važi $2^{n-2} = k$ i $3^{n-1} = 2k^2+1$. Slijedi da je $3^{n-1} = 2^{2n-3} + 1$. Kako je $2^{2n-3} + 1 = 2^{2n-8+5} + 1 > 4^{n-4} \cdot 32 > 3^{n-4} \cdot 27 = 3^{n-1}$, dobijamo kontradikciju.
Za $n = 1$ očigledno nema rješenja, dok za $n = 2$ važi $6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ i za $n = 3$, $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$. Dakle, za $n < 4$, rješenja su $(2,2)$ i $(4,3)$.

2. Koristeći Pitagorinu teoremu i podatke $BC = 25$, $BD = 20$ i $BE = 7$, dobijamo da je

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15$$

i

$$CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24.$$



Kako je $\angle ADB = \angle AEC = 90°$, to slijedi $\Delta ADB \sim \Delta AEC$,
pa važi

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

Slijedi

$$\frac{AD}{AE} = \frac{5}{6}$$

i

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE + 7}{AD + 15} = \frac{5}{6}.$$

Rješavajući dati sistem jednačina dobijamo $AD = 15$ i $AE = 18$. Slijedi da je $AB = BC$ i tačka D je središte duži AC, odnsosno hipotenuze pravouglog trougla ΔAEC, pa je $DE = \frac{AC}{2} = 15$.
Kako je DE prečnik kružnice, to je $\angle DFE = 90°$, kao periferijski ugao nad prečnikom i $AD = DE$, slijedi da je $AF = \frac{AE}{2} = 9$.

Četvorougao $EBCD$ je tetivan, jer je $\angle BEC = \angle CDB = 90°$. Četvorougao $FEDG$ je tetivan, po uslovima zadatka, pa je

$$\angle AFG = 180° - \angle EFG = \angle GDE = 180° - \angle EDC = \angle CBE,$$

pa dobijamo da je $GF \parallel CB$.
Slijedi,

$$\frac{AK}{AP} = \frac{AF}{AB}.$$

Kako je $AB = BC$, slijedi da je $AP = CE = 24$. Dobijamo

$$AK = \frac{AF \cdot AP}{AB} = \frac{216}{25}.$$

3. Kako u nizu ne postoje susjedne jedinice, to je svaki sabirak $a_i a_{i+1}$ jednak 2 ili 4. Pozicije jedinica u nizu su 1, 3, 6, 10, ….. Označimo sa $f(n)$ poziciju n-te jedinice. Važi $f(1) = 1$,

$$f(2) = 3 = 2 + 1 = 2 + f(1),$$
$$f(3) = 6 = 3 + 3 = 3 + f(2),$$

pa zaključujemo da važi $f(n) = n + f(n-1)$.
Slijedi

$$\begin{aligned} f(n) &= n + f(n-1) \\ &= n + n - 1 + f(n-2) \\ &= \cdots \\ &= n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Kako je $f(63) = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$ i $f(64) = 64 + 2016 = 2080$, slijedi da se u prvih 2024 člana niza nalaze tačno 63 jedinice, a preostale su dvojke.
Ako je $a_k = 1$, onda je $a_{k+1} = 2$ i $a_{k-1} = 2$, za $k > 1$, pa svaka jednica u nizu određuje dvije dvojke u zbiru (zbog dvije susjedne dvojke), osim prve jedinice, jer ona ima samo jednu susjednu dvojku.
Dakle, broj dvojki u zbiru je $62 \cdot 2 + 1 = 125$, a ostali sabirci su jednaki 4. Slijedi da je traženi zbir

$$4 \cdot 2023 - 2 \cdot 125 = 7842.$$

4. Dovoljno je dokazati da važi

$$x^2 + yz > \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Data nejednakost je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2yz &> x^2 + y^2 + z^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 > y^2 - 2yz + z^2 = (y-z)^2 \\ &\Leftrightarrow x > |y - z|, \end{aligned}$$

a posljednja nejednakost je tačna, jer važi nejednakost trougla.