ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2023.

SREDNJA ŠKOLA, III i IV RAZRED

MATEMATIKA

Autorka/autor testa ....

Recenzentkinja/recenzent ....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- **Vrijeme za rad: 240 minuta.**
- **Rješenja zadataka neophodno je detaljno obrazložiti. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.**
- **Raspodjela poena**

Zadatak	1	2	3	4
Maksimalan broj poena	25	25	25	25

- **Pribor za rad geometrijski pribor, grafitna olovka, gumica i plava ili crna hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. **Odrediti sve prirodne brojeve m, n, k tako da važi**

$$1 + 5^n = 2^m + 5 \cdot 2^k.$$

2. **Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ za koje važi da je**

$$f(x^2) - f(y^2) = f(x + y) \cdot f(x - y),$$

za $x, y \in \mathbb{N}_0$, $x \geq y$.

Napomena: Skup $\mathbb{N}_0$ je skup prirodnih brojeva zajedno sa nulom.

3. **U tabeli dimenzija $n \times n$, $n \geq 2$, neki kvadrati su obojeni crnom bojom, a ostali bijelom bojom. Bojenje zovemo pravilnim ako za svake dvije izabrane kolone i svake dvije izabrane vrste četiri kvadrata koji se nalaze na presjeku tih kolona i vrsta nijesu svi obojeni istom bojom. Dokazati da je $n \leq 4$.**

4. **U trouglu ΔABC bisektrisa ugla $\angle CAB$ siječe stranicu BC u tački L. Na stranicama AC i AB izabrane su tačke M i N, respektivno, tako da se duži AL, BM i CN sijeku u jednoj tački i $\angle AMN = \angle ALB$. Dokazati da je $\angle NML$ prav.**

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Posmatrajući ostatak lijeve i desne strane jednakosti pri dijeljenju sa 5, dobijamo da 2^m daje ostatak 1. Jednostavno zaključujemo da broj m mora biti djeljiv sa 4 ($2^1 \equiv 1, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 3, 2^4 \equiv 1 \; mod5$), tj. $m = 4m_1$, za $m_1 \in \mathbb{N}$.
Neka je $k \geq 2$. Tada je desna strana jednakosti djeljiva sa 4, jer je $m \geq 4$. Međutim, to nije moguće: kako 5^n daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 4, to $1 + 5^n$ daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 4.
Dakle, $k = 1$ pa naša jednačina dobija oblik

$$5^n - 2^{4m_1} = 9.$$

Kako $2^{4m_1} = 16^{m_1}$ daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3, to slijedi da 5^n daje ostatatak 1 pri dijeljenju sa 3, što povlači da je n paran, tj. $n = 2n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$. Odavde, dobijamo da je

$$9 = (5^{n_1} - 2^{2m_1}) \cdot (5^{n_1} + 2^{2m_1}).$$

Kako su oba dobijena faktora broja 9 prirodni brojevi i kako je $5^{n_1} + 2^{2m_1} > 5^{n_1} - 2^{2m_1}$, dobijamo sistem

$$5^{n_1} - 2^{2m_1} = 1,$$
$$5^{n_1} + 2^{2m_1} = 9.$$

Sabiranjem jednačina dobija se $2 \cdot 5^{n_1} = 10$, odnosno $n_1 = 1$. To povlači $n = 2$ i $m_1 = 1$, odnosno $m = 4$. Dakle, jednačina ima samo jedno rješenje i to $(m, n, k) = (4,2,1)$.

2. Uvrštavajući par $(x, y) = (0,0)$ dobijamo

$$0 = f(0^2) - f(0^2) = f(0) \cdot f(0),$$

odakle slijedi da je $f(0) = 0$.
Dalje, za par $(x, y) = (x, 0)$ imamo

$$f(x^2) - f(0^2) = f(x)^2,$$

Odnosno

$$f(x)^2 = f(x^2), \text{ za } x \in \mathbb{N}_0. \qquad (1)$$

Specijalno, za $x = 1$ dobijamo $f(1) = f(1)^2$, pa razlikujemo dva slučaja.

- $f(1) = 0$
  Za par $(x, y) = (n + 1, n)$ imamo
  $$f((n + 1)^2) - f(n^2) = f(2n + 1) \cdot f(1) = 0,$$
  što povlači da je $f((n + 1)^2) = f(n^2)$, a zajedno sa (1) daje $f(n + 1) = f(n)$, jer funkcija f uzima nenegativne vrijednosti. Dakle, f je konstantna funkcija, pa je $\boldsymbol{f(n) = 0}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_{\boldsymbol{0}}$. Primijetimo da ova funkcija zaista zadovoljava uslov zadatka.

- $f(1) = 1$
  Neka je $f(2) = m \in \mathbb{N}_0$. Tada za $(x, y) = (2,1)$ imamo

$$
\begin{aligned}
m^2 - 1 &= f(2)^2 - 1 \\
&= f(2^2) - f(1^2) \\
&= f(3)f(1) = f(3).
\end{aligned}
$$

Kako je $f(4) = f(2^2) = f(2)^2 = m^2$, za par $(x, y) = (3,1)$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
(m^2 - 1)^2 - 1 &= f(3)^2 - 1 \\
&= f(3^2) - f(1^2) \\
&= f(4)f(2) = m^3 \,,
\end{aligned}
$$

Odnosno $m^4 - m^3 - 2m^2 = 0$.
Kako je $m^4 - m^3 - 2m^2 = m^2(m^2 - m - 2)$, moguće vrijednosti za m su $m = 0$ i $m = 2$, jer $m = -1 \notin \mathbb{N}_0$.

i) $m = 0$
Tada $f(3) = -1 \notin \mathbb{N}_0$, pa ovaj slučaj nije moguć.

ii) $m = 2$
Indukcijom dokazujemo da je $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}_0$.
Neka je tvrđenje tačno za $k \leq n$, gdje je $n \geq 2$. Dokazujemo tvrđenje za $k = n + 1$.
Za par $(x, y) = (n, 1)$ imamo

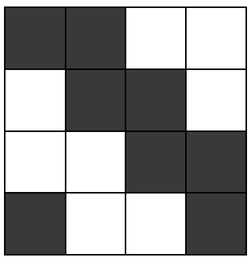
$$
\begin{aligned}
f(n^2) - f(1^2) &= f(n+1)f(n-1) \\
&= f(n+1)(n-1),
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
f(n+1) \cdot (n-1) &= f(n)^2 - 1 \\
&= n^2 - 1 \\
&= (n+1)(n-1).
\end{aligned}
$$

Kako je $n - 1 \neq 0$, to je $f(n+1) = n + 1$, što je trebalo dokazati.
Primijetimo da i funkcija $\boldsymbol{f(n) = n}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_{\boldsymbol{0}}$, zadovoljava uslov zadatka, pa je i ona rješenje zadatka.

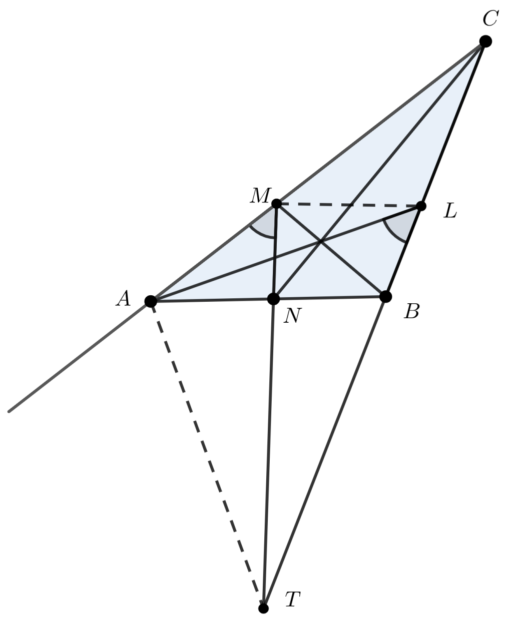
3. Sljedeća tabela sadrži primjere pravilnog bojenja u dimenzijama $2x2$, $3x3$ i $4x4$, što se vidi direktnom provjerom.



Pretpostavimo da postoji pravilno bojenje tabele dimenzije 5×5. U svakoj vrsti tabele jedna boja se pojavljuje barem tri puta. Takođe, jedna boja, recimo crna, (anologno se radi ako je bijela), je zastupljena više od bijele boje u bar tri vrste,

odnosno u te tri vrste se pojavljuje barem tri puta. Posmatramo samo tri takve vrste (zanemarimo preostale dvije). Zaključujemo da je u te tri vrste od ukupno 15 polja, barem 9 obojeno crnom bojom.
Ako postoji kolona u kojoj su sva tri polja (iz izabranih vrsta) obojena crnom bojom, tada u svakoj drugoj koloni postoji najviše jedno crno polje, inače bismo imali četiri kvadrata iste boje, pa bojenje ne bi bilo pravilno. Međutim, u tom slučaju broj crnih polja u te tri vrste je ne više od $3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 < 9$, što nije tačno. Zato, u svakoj od ovih kolona najviše dva polja (iz izabranih vrsta) su obojena crnom bojom.
Posmatramo sada broj kolona sa tačno dva crna polja u ove tri vrste. Ako takvih kolona ima barem četiri, tada postoje dvije kolone u kojima je raspodjela crnih polja ista (postoje tri moguće raspodjele “12”, “13”, “23”), pa bi postojala četiri crno obojena kvadrata iz uslova zadatka. Dakle, najviše tri kolone imaju po dva crna polja, pa je ukupan broj crnih polja u tom slučaju ne veći od $2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8 < 9$, što nije tačno.
Zaključujemo, da u tabeli dimenzija 5×5 ne postoji pravilno bojenje. Lako je primijetiti da pravilno bojenje ne postoji ni za tabelu dimenzija $n \times n$, za $n \geq 5$, jer bi tada imali pravilno bojenje i za bilo koju “podtabelu” dimenzija 5×5.

4. Neka je T presjek prave MN i BC.



Kako je $\angle ALT = \angle AMT$, to je četvorougao $ATLM$ tetivan, odakle slijedi

$$\angle NML = \angle TML = \angle TAL.$$

Dovoljno je dokazati da je $\angle TAL$ prav što je ekvivalentno sa činjenicom da je AT bisektrisa spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla ABC, jer u svakom trouglu ugao između bisektrise unutrašnjeg ugla i bisektrise spoljašnjeg ugla je prav.

Kako se AL, BM i CN sijeku u jednoj tački, iz Cevijeve teoreme imamo da je

$$\frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} \cdot \frac{|AN|}{|NB|} = 1. \qquad (1)$$

Takođe, kako su tačke $M \in p(AC), N \in p(AB)$ i $T \in p(BC)$ kolinearne, iz Menelajeve teoreme imamo

$$\frac{|CM|}{|MA|} \cdot \frac{|AN|}{|NB|} \cdot \frac{|BT|}{|TC|} = 1. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|BT|}{|TC|}. \qquad (3)$$

Kako je L presjek bisektrise $\angle CAB$ i stranice BC to važi i

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|AC|}, \qquad (4)$$

što zajedno sa (3) daje

$$\frac{|BT|}{|TC|} = \frac{|AB|}{|AC|}. \qquad (5)$$

Poslednja jednakost je ekvivalentna sa činjenicom da je AT bisektrisa spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla ABC, što je i trebalo dokazati.