UPUTSTVO ZA OCJENJIVANJE

MATURSKI ISPIT – ANALIZA SA ALGEBROM (OSNOVNI NIVO)

19.05. 2022. GODINA

1. Tačan odgovor: A

$$\frac{(ab)^{-1}(a^2+ab+b^2)^{-2}}{8\sqrt{a-b}} : \frac{\sqrt{a^3b^2-a^2b^3}}{\left(a^4b-ab^4\right)^2}$$

$$=\frac{1}{(a^2+ab+b^2)^2 8ab\sqrt{a-b}}\cdot\frac{a^2b^2\left(a-b\right)^2\left(a^2+ab+b^2\right)^2}{ab\sqrt{a-b}}$$

$$=\frac{|a-b|}{8}=\frac{2}{8}=0,25.$$

2. Tačan odgovor: A

Po uslovu zadatka $a=3k+1$ i $b=3m+2$, gdje su $k,m\in N$. Tada je

$$a^2+2ab+2b^2+8b+16$$

$$=9k^2+18m^2+18k+54m+45+18km$$

$$=9(k^2+2m^2+2k+6m+5+2km)$$

pa je traženi ostatak 0.

3. Tačan odgovor: D

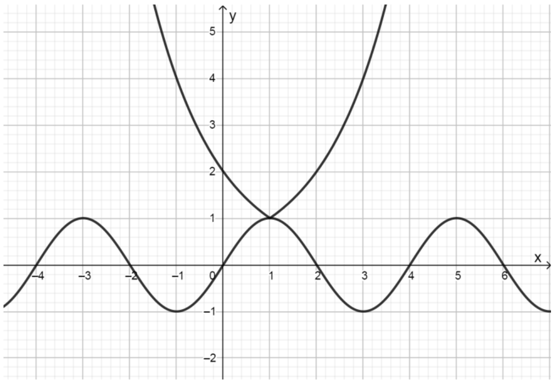
$$\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}+2\sqrt{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}+2\sqrt{2}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)}+2\sqrt{2}$$

$$=2-2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}=3$$

4. Tačan odgovor: B

Skiciranjem grafika datih funkcija vidimo da jednačina ima 1 rješenje.



5. Tačan odgovor: C

$$\left(\frac{1}{x^{1001}}-x^{10}\right)^{2022}=\sum_{k=0}^{2022}\binom{2022}{k}\left(x^{-1001}\right)^{k}\left(-x^{10}\right)^{2022-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{2022}\binom{2022}{k}x^{-1001k+20220-10k}(-1)^{2022-k}$$

$$-1001k+20220-10k=2022,\ k=18$$

$$\binom{2022}{18}\cdot(-1)^{2022-18}=\binom{2022}{18}=\binom{2022}{2004}$$

6.

Neka je traženi kompleksni broj $z=x+yi$. Tada datu jednačinu pišemo u obliku $\sqrt{x^2+y^2}+3x+3yi=1+3i$ odakle dobijamo sistem:

$\sqrt{x^2+y^2}+3x=1$

$3y=3$ .... 1 bod

Dakle $y=1$, pa dobijamo jednačinu $\sqrt{x^2+1}=1-3x$, $x\le\frac{1}{3}$ .... 1 bod

Jedino rješenje jednačine $8x^2-6x=0$ koje zadovoljava prethodnu nejednakost je $x=0$ .... 2 boda

Dakle, $z=i$. Tada je $1+z\sqrt{3}=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ .... 1 bod

Otuda se dobija $\left(1+z\sqrt{3}\right)^{2022}=2^{2022}\left(\cos\frac{2022\pi}{3}+i\sin\frac{2022\pi}{3}\right)=2^{2022}$ .... 1 bod

7.

Ako polinom $P(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\ldots+p_nx^n$ pri dijeljenju sa polinomom $x^2-1=(x-1)(x+1)$ daje ostatak $ax+b$, to važi

$P(1)=a+b$ i $P(-1)=-a+b$ .... 1 bod

$P(1)=p_0+p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=2+1=3$

$P(-1)=p_0-p_1+p_2-p_3+\ldots+(-1)^n p_n=1-2=-1$ .... 1 bod

Pa imamo $\begin{cases} a+b=3 \\ b-a=-1 \end{cases}$ .... 1 bod

Odakle je $b=1$ i $a=2$, pa je $2b-a=0$ .... 1 bod

8.

Nakon dodavanja prve jednačine drugoj dobija se ekvivalentan sistem jednačina:

$x-y=a$

$(|a|-1)y=a$ .... 1 bod

Sistem nema rješenja ako je druga jednačina oblika $0y=a$, gdje je $a\neq 0$. .... 1 bod

Dakle, mora važiti $|a|-1=0$, pa sistem nema rješenja za

$a=1$ i $a=-1$. .... 1 bod

9.

Uvođenjem smjene $t=\frac{1}{1+x}$ dobijamo .... 1 bod

$t=\frac{1}{1+x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}-1$, pa je $f(t)=\frac{1}{t}-1-1$, odnosno $f(x)=\frac{1}{x}-2$. .... 1 bod

$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-\frac{4x}{2x+1}$ i $f(1+x)=-\frac{2x+1}{1+x}$ .... 1 bod

Data nejednačina se može zapisati na sljedeći način:

$\frac{4x(1+x)}{(2x+1)^2}\leq 0,\ x\neq -1,\ x\neq -\frac{1}{2}$ .... 1 bod

Rješenje posljednje nejednačine je $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right]$. .... 1 bod

10.

Jednačinu treba logaritmovati (sa osnovom 8) .... 1 bod

Nakon sređivanja i primjenom osnovnih svojstava logaritma dobija se ekvivalentna jednačina: $(3+2\log_8 x)\log_8 x = 3+2\log_8 x$ .... 1 bod

Odnosno $(3+2\log_8 x)(-1+\log_8 x)=0$ .... 1 bod

Rješenja posljednje jednačine su $x = 8^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{32}$ i $x=8$ .... 1 + 1 bod

11.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{ax} = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ 1, & a=0 \\ 0, & a<0 \end{cases}$$ .... 1 bod

pa je $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{ax}} = +\infty$ za $a=0$ i $a<0$ .... 2 boda

Za $a>0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{ax}} \overset{l.p.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{ax}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{ae^{ax}} \overset{l.p.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{a^2 e^{ax}} = 0.$ .... 2 boda

12.

$D_f = (0,+\infty)$ .... 1 bod

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$. Prava $x=0$ je vertikalna asimptota .... 1 bod

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{l.p.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$ .... 1 bod

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Prava $y=0$ je horizontalna asimptota .... 1 bod

13.

Kako je $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4d$ to su brojevi a_1, a_1+d, a_1+4d uzastopni članovi geometrijskog niza .... 1 bod

Važi $\left(a_1+d\right)^2 = a_1\left(a_1+4d\right)$ .... 1 bod

$\not{a_1}^2 + 2a_1d + d^2 = \not{a_1}^2 + 4a_1d$ tj. $d(2a_1 - d) = 0$ pa je $d = 0$ ili je $a_1 = \frac{d}{2}$ .... 1 bod

Kako je niz strogo rastući mora biti $d > 0$ .... 1 bod

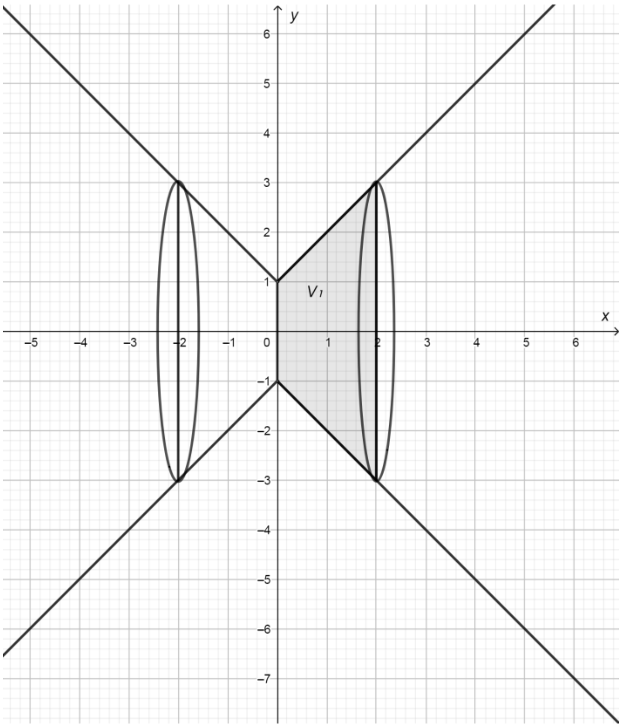
Slijedi da je:

$$\frac{a_5}{a_1} - \frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 + 4d}{a_1} - \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 2d} =$$

$$= \frac{\frac{d}{2} + 4d}{\frac{d}{2}} - \frac{\frac{d}{2} + 6d}{\frac{d}{2} + 2d} =$$

$$= \frac{\frac{9}{2}d}{\frac{1}{2}d} - \frac{\frac{13}{2}d}{\frac{5}{2}d} = 9 - \frac{13}{5} = \frac{32}{5}$$ .... 1 bod

14.



.... 1 bod

$|x| + 1 = x + 1$ za $x \in [0, 2]$

$V = 2V_1$ .... 1 bod

$V = 2\pi \int_0^2 (x+1)^2 \, dx$ .... 1 bod

$$V=2\pi\int_0^2 (x+1)^2\,dx = 2\pi\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2$$ .... 1 bod

$$V=\left(\frac{8}{3}+4+2\right)=\frac{52\pi}{3}$$ .... 1 bod

15.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{\not{2}x}{\not{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+1)}{\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}$$ .... 1 +1 bod

$$f'(0)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$ .... 1 bod

Jednačina tangente u tački $\left(0, f(0)\right):(y-0)=y'(0)(x-0)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x$ .... 1 bod