ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2022.

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

Autorka/autor testa ....

Recenzentkinja/recenzent ....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maksimalan broj poena	**25**	**25**	**25**	**25**

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Dokazati da za svaka dva pozitivna broja x i y, $x < y$, važi:

$$x + \sqrt{y^2 + 2} < y + \sqrt{x^2 + 2}$$

2. Ako za cijele brojeve m, n, k i l važi jednakost $m^2 + n^2 + k^2 = l^2$, tada je broj mnk djeljiv sa 4. Dokazati.

3. Na stranicama AB i BC trougla ΔABC izabrane su redom tačke P i Q takve da je $PQ \parallel AC$. Duži AQ i PC se sijeku u tački O, i važi $AP = AO$ i $PQ = QC$. Dokazati da je $AQ = PB$.

4. Kvadratna tabla dimenzije 50x50 podijeljena je na 2500 malih kvadratića dimenzije 1x1. Koliki je minimalan broj malih kvadratića koje treba obojiti tako da svaki pravougaonik dimenzija 1x6, obrazovan od šest kvadratića na ovoj tabli (horizontalnih ili vertikalnih), sadrži bar jedan obojeni kvadratić?

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Kako sa obje strane nejednakosti imamo pozitivne brojeve, kvadriranjem lijeve i desne strane znak nejednakosti ostaće nepromijenjen. Dobijamo

$$x^2 + 2x\sqrt{y^2+2} + y^2 + 2 < y^2 + 2y\sqrt{x^2+2} + x^2 + 2$$

Anuliranjem istih elemenata sa lijeve i desne strane nejednakosti dobijamo

$$2x\sqrt{y^2+2} < 2y\sqrt{x^2+2}$$

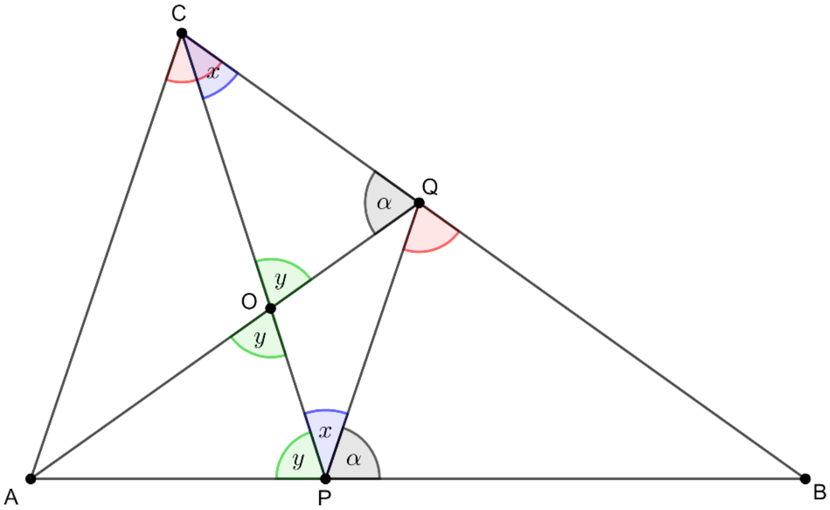
što, nakon dijeljenja sa 2 i jos jednog kvadriranja, postaje

$$x^2(y^2+2) < y^2(x^2+2)$$

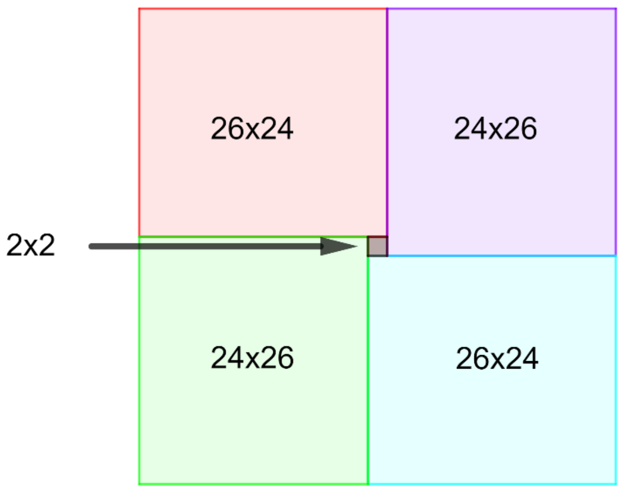
Iz posljednje nejednakosti se trivijalno dobija $x^2 < y^2$, što je tačno, jer je $0 < x < y$.

2. Dovoljno je dokazati da su bar dva od brojeva m, n i k parni.
Primijetimo, da ako je cio broj x paran ($x = 2k$), tada je $x^2 = 4k^2$, tj. x^2 je djeljiv sa 4. Ako je cio broj x neparan ($x = 2k + 1$), tada je $x^2 = 4k^2 + 4k + 1$, tj. x^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 4.
Dokažimo da se među brojevima m, n i k ne može naći više od jedan neparan broj. Ako bi svi bili neparni, tada bi broj $m^2 + n^2 + k^2$ pri dijeljenju sa 4 dao ostatak 3, sto je nemoguće, jer l^2 pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1. Ako bi dva među njima bila neparna, tada bi broj $m^2 + n^2 + k^2$ pri dijeljenju sa 4 dao ostatak 2, sto je nemoguće, jer l^2 pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1.
Dakle, bar dva medju brojevima m, n i k su parni, pa je njihov proizvod mnk djeljiv sa 4.

3. Očigledno, iz paralelnosti duži PQ i AC slijedi da je $\angle BQP = \angle BCA$ (uglovi sa paralelnim kracima). Dalje, označimo $\angle OQC = \alpha$, $\angle QCO$=x i $\angle COQ = y$. Važi $\alpha = 180° - x - y$. Kako je trougao ΔPQC jednakokraki, to je $\angle CPQ = \angle QCP = \angle QCO = x$. Pored toga, kako je i trougao ΔAPO jednakokraki, vazi $\angle APO = \angle POA = \angle COQ = y$. Odavde je $\angle QPB = 180° - x - y = \alpha$.
Dakle, za trouglove ΔAQC i ΔPBQ važi: $PQ = QC$, $\angle QCA = \angle BQP$ i $\angle AQC = \angle OQC = \angle QPB = \alpha$, pa su po stavu USU oni podudarni. Odavde slijedi da je $AQ = PB$.



4. Tablu možemo podijeliti na četiri pravougaonika dimenzija 24x26 i na centralni kvadrat dimenzija 2x2. Svaki pravougaonik možemo podijeliti na $4 \cdot 26$ pravougaonika dimenzija 1x6, pa je potrebno obojiti bar $4 \cdot 4 \cdot 26 = 416$ kvadratića.



Dokažimo da je to i dovoljno. Obojimo sve kvadratiće na paralelnim dijagonalama dužina 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47. Ovakvo bojenje zadovoljava uslove zadatka, a obojili smo $2 \cdot (5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 + 41 + 47) = 416$ kvadratića.