ispitni centar
PRAVA
MJERA
ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2022.

SREDNJA ŠKOLA, III i IV RAZRED

MATEMATIKA

Autorka/autor testa ....

Recenzentkinja/recenzent ....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **240 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maksimalan broj poena	**25**	**25**	**25**	**25**

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. **Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve x,y,z važi**

$$\frac{1+xy}{z}+\frac{1+yz}{x}+\frac{1+xz}{y}>\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+2}+\sqrt{z^2+2}.$$

2. **Odrediti najmanji prirodan broj $n>1$ tako da je kvadratna sredina prvih n prirodnih brojeva prirodan broj.**
Napomena: Kvadratna sredina brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ je broj

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}}.$$

3. **Dat je trougao ABC sa najkraćom stranicom BC. Neka je M tačka na stranici AB i N tačka na stranici AC tako da je $\angle MCB=\angle NBC=\angle BAC$. Dokazati da je prava koja prolazi kroz centar opisane kružnice trougla ABC i centar opisane kružnice trougla AMN normalna na BC.**

4. **Neka je A skup od 2022 tačke u ravni. Svake dvije tačke skupa A su na rastojanju barem 1. Dokazati da skup A sadrži podskup B od 253 tačke tako da su svake dvije tačke iz skupa B na rastojanju barem $\sqrt{3}$.**

RJEŠENJA

1. Zapisujemo lijevu stranu u sljedećem obliku

$$L = \frac{1+xy}{z} + \frac{1+yz}{x} + \frac{1+xz}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + xyz\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right).$$

Koristeći tri puta nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine imamo da je

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy},$$
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{2}{xz},$$
$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{2}{yz}.$$

Sumirajući lijeve strane dobijamo da je

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz},$$

odnosno

$$L \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + (x+y+z) = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Dalje, kako je

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 > a^2 + 2,$$

to za sve $a > 0$ važi

$$a + \frac{1}{a} > \sqrt{a^2 + 2}.$$

Slijedi da je

$$L > \sqrt{x^2+2} + \sqrt{y^2+2} + \sqrt{z^2+2}.$$

2. Kako je $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, za $n \in N$, (dokaz se može izvesti matematičkom indukcijom), uslov zadatka je ekvivalentan uslovu da je

$$(n+1)(2n+1) = 6k^2, \text{ za } k \in N.$$

U odnosu na ostatak broja n pri djeljenju sa 6 imamo 6 slučajeva:

1. $n = 6l$
$$(n+1)(2n+1) = (6l+1)(12l+1) = 6(12l^2 + 3l) + 1.$$

2. $n = 6l + 1$
$$(n+1)(2n+1) = (6l+2)(12l+3) = 6(3l+1)(4l+1).$$

3. $n = 6l + 2$

$$(n+1)(2n+1) = (6l+3)(12l+5) = 6(12l^2+11l+2)+3.$$

4. $n = 6l+3$

$$(n+1)(2n+1) = (6l+4)(12l+7) = 6(12l^2+15l+4)+4.$$

5. $n = 6l+4$

$$(n+1)(2n+1) = (6l+5)(12l+9) = 6(12l^2+19l+7)+3.$$

6. $n = 6l+5$

$$(n+1)(2n+1) = (6l+6)(12l+11) = 6(l+1)(12l+11).$$

Zaključujemo da je $n = 6l+1$ ili $n = 6l+5$.

a) $n = 6l+5$

Slijedi da je $k^2 = (l+1)(12l+11)$. Kako je $12(\boldsymbol{l}+\mathbf{1}) - 1(\mathbf{12}\boldsymbol{l}+\mathbf{11}) = 1$, to su brojevi $12l+11$ i $l+1$ uzajamno prosti, pa su oba broja potpuni kvadrati (kvadrati nekog prirodnog broja): $l+1 = a^2, 12l+11 = b^2$. Odavde slijedi da je $12a^2 = 1 + b^2$, što nije moguće jer je lijeva strana djeljiva sa 4, a desna nije (kvadrat prirodnog broja daje ostatak 0 ili 1 pri djeljenju sa 4).

b) $n = 6l+1$

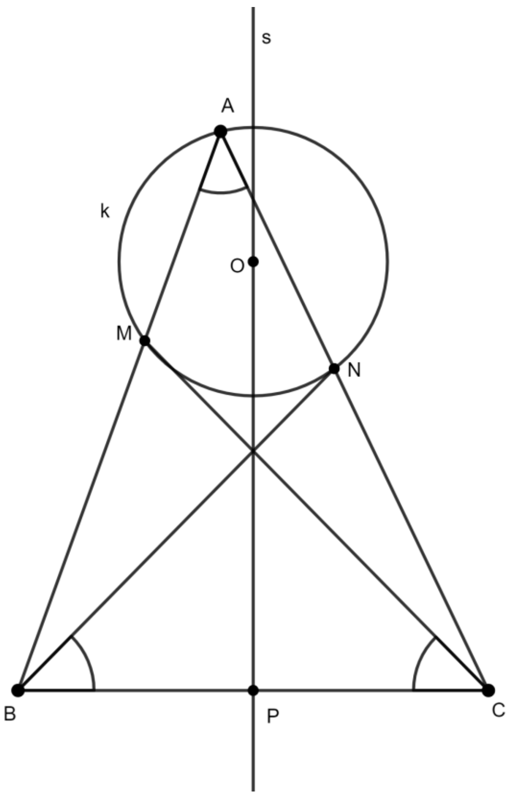
Analogno, iz $k^2 = (3l+1)(4l+1)$ i činjenice da su brojevi $3l+1$ i $4l+1$ uzajamno prosti, imamo da su oba broja potpuni kvadrati. Slijedi da je $4a^2 = 3b^2+1$ ($a^2 = 3l+1$; $b^2 = 4l+1$), što je ekvivalentno sa

$$(2a-1)(2a+1) = 3b^2. \qquad (1)$$

Tražimo najmanje a sa ovim svojstvom. Za $a = 1$ imamo da je $l = 0$, odnosno $n = 1$, što nije naš slučaj.

Primijetimo da se svi prosti faktori lijeve strane u (1), osim eventualno 3, pojavljuju sa parnim eksponentom (zbog člana b^2). Ali, za sve brojeve $a \in \{2,3,\ldots,12\}$ ili je $2a-1$ ili je $2a+1$ prost broj, pa to nije ispunjeno. Za $a = 13$, imamo da je $b = 15$, odnosno zadovoljena je jednakost (1). Dobijamo da je $l = 56$. Dakle, $3l+1$ i $4l+1$ su potpuni kvadrati. Konačno n=337.

3. Posmatramo simetralu s stranice BC. Centar opisane kružnice trougla ABC, jasno, pripada pravoj s. Neka je O centar opisane kružnice k trougla AMN. Dovoljno je dokazati da O pripada pravoj s, odnosno da je $OB = OC$.



Iz $\angle MCB = \angle BAC$ i $\angle CBM = \angle CBA$ slijedi da su trouglovi ABC i CBM slični. Analogno se dokazuje da su trouglovi ABC i BNC slični.

Odavde slijedi da je

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BM}{BC}$$

i

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CN}{CB},$$

odnosno $BC^2 = BA \cdot BM$ i $BC^2 = CA \cdot CN$.

Kako je $BA \cdot BM$ potencija tačke B u odnosu na krug k, a $CA \cdot CN$ potencija tačke C u odnosu na isti krug, to je

$$BC^2 = OB^2 - r^2,$$

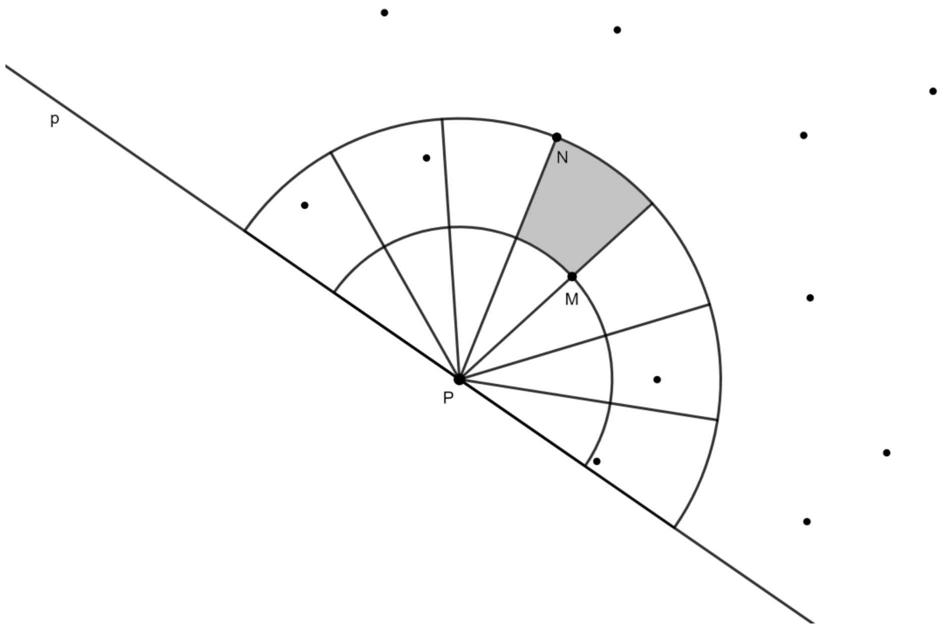
odnosno

$$BC^2 = OC^2 - r^2,$$

gdje je r poluprečnik kružnice k. Odavde slijedi $OB = OC$, što je i trebalo dokazati.

4. Neka je $P \in A$ i prava p takva da $P \in p$ i da su sve ostale tačke skupa A sa jedne strane prave p. Neka je D zatvoreni polukrug sa centrom u tački P, prečnikom na pravoj p, poluprečnika $\sqrt{3}$, sa one strane prave p sa koje je i skup A. Podijelimo polukrug na sedam ugaonih sektora ugaone veličine $\frac{\pi}{7}$.

Dokazaćemo da svaki sektor sadrži najviše jednu tačku iz skupa A osim tačke P. Pretpostavimo suprotno: postoji ugaoni sektor koji sadrži barem dvije različite tačke iz skupa A. Kako su te tačke na rastojanju barem 1 od tačke P, onda se te tačke nalaze u nekom „krivolinijskom četvorouglu" kao sa slike.



Primijetimo da najveće rastojanje između dvije tačke iz tog „krivolinijskog četvorougla" je rastojanje između tačaka M i N. Postavimo koordinatni sistem sa početkom u tački P, tako da je poluprava PM pozitivni dio x-ose. Tada je $M(1,0)$, a $N\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right), \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$. Imamo da je

$$|MN| = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^2} = \sqrt{4-2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}.$$

Kako je $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, to je

$$|MN| < \sqrt{4-3} = 1,$$

što nije moguće iz uslova zadatka. Dakle, naš polukrug sadrži najviše osam tačaka. Ako izbrišemo sve tačke iz ovog polukruga ostaje nam najviše 2014 tačaka. Nastavljajući postupak, poslije konačnog broja koraka izbrisaćemo sve tačke našeg skupa A. Primijetimo da je za brisanje svih tačaka potrebno barem $\frac{2022}{8}$ koraka, tj. barem 253 koraka. Za skup B posmatramo centre odgovarajućih polukrugova iz svake iteracije. Tačke skupa B zadovoljavaju traženi uslov, jer u suprotnom, ako bi rastojanje između dvije tačke skupa B bilo manje od $\sqrt{3}$, tada bi jedna od tih tačaka bila izbrisana tokom odgovarajuće iteracije kada je druga tačka centar polukruga.