ispitni centar
PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2022.

SREDNJA ŠKOLA, I i II RAZRED

MATEMATIKA

Autorka/autor testa ....

Recenzentkinja/recenzent ....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- **Vrijeme za rad: 240 minuta.**
- **Rješenja zadataka neophodno je detaljno obrazložiti. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.**
- **Raspodjela poena:**

Zadatak	1.	2.	3.	4.
Maksimalan broj poena	25	25	25	25

- **Pribor za rad: hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Prirodan broj nazivamo ***simpatičnim*** ako je djeljiv sa proizvodom svojih cifara. Naći najveći simpatični trocifreni broj.

2. Neka je ABC pravougli trougao sa pravim uglom kod tjemena C. Neka je D središte katete AC i E podnožje normale iz C na BD. Dokazati da je tangenta u tački C na opisanu kružnicu trougla AEC normalna na AB.

3. Koliko uređenih trojki (x, y, z) cijelih brojeva zadovoljava nejednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z + 2?$$

4. Neka je dat skup $A = \{1,2, \dots, k^2 + k + 2\}$ i neka su $S_1, S_2, \dots, S_k$ podskupovi tog skupa, takvi da važi $|S_i| = k^2 + i + 1$, za $i = 1,2, \dots, k$. Dokazati da skup

$$S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$$

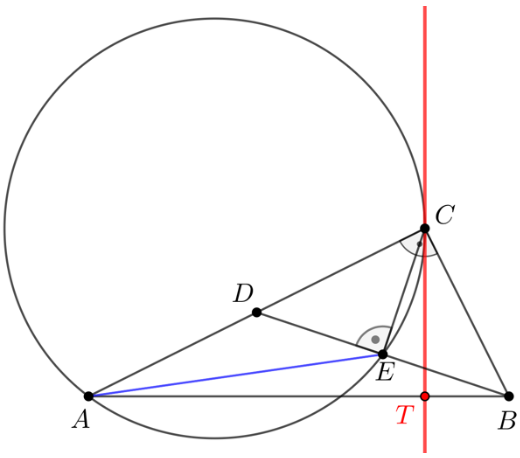
sadrži bar dva uzastopna broja.

<u>Napomena:</u> sa $|X|$ je označen broj elemenata konačnog skupa X.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Označimo sa $n = \overline{abc}$ najveći simpatični trocifreni broj. Jasno je da n ne može sadržati nulu kao cifru.
Ako bi važilo da je $a = 9$, onda je n djeljiv sa 9. Kako najveći trocifreni broj 999 nije djeljiv sa $9 \cdot 9 \cdot 9$, to je zbir cifara broja n jednak 18 (jasno je da ne može biti 9, a ni 27). Uočimo da je sada tačno jedna od cifara b ili c parna (jer je cifra a neparna). Ako bi cifra c bila neparna, onda bi n bio neparan broj, a to nije moguće, jer bi cifra b bila parna, pa n u tom slučaju ne bi bio djeljiv sa proizvodom svojih cifara. Dakle, cifra c je parna. Dobijamo kandidate za najveći simpatični trocifreni broj čija je cifra stotina 9, a čiji je zbir cifara 18: 972, 954, 936 i 918, ali ni jedan ne zadovoljava uslov da je djeljiv sa proizvodom svojih cifara.
Ako je $a = 8$, onda je n djeljiv sa 8, pa je cifra jedinica, c, parna. Slijedi da je proizvod cifara broja n, a samim tim i broj n, djeljiv sa 16. Kandidati za najveći simpatični trocifreni broj su sada: 896, 864, 848, 832 i 816. Provjerom se utvrđuje da jedino 816 zadovoljava uslov da je djeljiv sa proizvodom svojih cifara, pa je to najveći simpatični trocifreni broj.

2. Neka je T tačka presjeka tangente u C i prave AB. Dokazaćemo da je $\angle BTC = 90°$.



Kako je $\angle BCD = 90° = \angle CED$ i $\angle CDB = \angle CDE$ slijedi da su trouglovi BCD i CED slični (II stav sličnosti trouglova). Slijedi da je
$$\frac{DC}{DB} = \frac{DE}{DC},$$
pa kako je $DA = DC$, dobijamo
$$\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DA}. \qquad (1)$$

Kako je $\angle BDA = \angle EDA$ i važi (1), to na osnovu prvog stava sličnosti trouglova slijedi da važi
$$\Delta ADE \sim \Delta BDA.$$
Dobijamo $\angle ABD = \angle EAD$.

Ugao određen tetivom EC i tangentom TC podudaran je periferijskom uglu nad tetivom EC, odnosno
$$\angle EAD = \angle EAC = \angle TCE,$$
pa je
$$\angle TCE = \angle ABD = \angle TBE.$$
Slijedi da je četvorougao $BCET$ tetivan. Zato je $\angle BTC = \angle CEB$, kao periferijski uglovi nad istom tetivom, pa je $\angle BTC = 90°$.

3. Data nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2 \le 11.$$

Kako su $2x-1, 2y-1$ i $2z-1$ neparni cijeli brojevi, to sabirci na lijevoj strani mogu biti: tri sabirka jednaka 1, ili dva sabirka jednaka 1 i jedan sabirak jednak 9. Slijedi da su sva tri broja x, y, z iz skupa $\{0,1\}$, ili su tačno dva od brojeva x, y, z iz tog skupa, a treći je jednak −1 ili 2. Traženi broj uređenih trojki za prvi slučaj je 2^3. U drugom slučaju, od tri broja biramo jedan koji će biti iz skupa $\{-1,2\}$, a preostala dva broja su iz skupa $\{0,1\}$, pa je broj uređenih trojki u ovom slučaju $3 \cdot 2^3$. Dakle, ukupan broj uređenih trojki koje zadovoljavaju uslov zadatka je

$$2^3 + 3 \cdot 2^3 = 32.$$

4. Kako je $|S_k| = k^2 + k + 1$, to se u skupu S_k nalaze svi osim jednog elementa iz A. Analogno, u S_{k-1} se nalaze svi osim dva elementa iz A, itd. u S_1 se nalaze svi osim k elemenata iz A. Slijedi da skup $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_k$ sadrži sve osim najviše $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$ elemenata iz A, pa je

$$|S| \ge k^2 + k + 2 - \frac{k\cdot(k+1)}{2} = \frac{k^2+k+4}{2}.$$

Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, pri čemu važi $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_m \le k^2 + k + 2$. Pretpostavimo suprotno tj. pretpostavimo da S ne sadrži uzastopne brojeve. Tada je $a_{i+1} - a_i \ge 2$, za $i = 1,2, \ldots, m-1$. Slijedi da je

$$\begin{aligned} a_m &\ge a_1 + 2(m-1) \\ &\ge 1 + 2\left(\frac{k^2+k+4}{2} - 1\right) \\ &= k^2 + k + 3, \end{aligned}$$

što je nemoguće. Dakle, S mora sadržati bar dva uzastopna broja.