ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2022.

OSNOVNA ŠKOLA, VI RAZRED

MATEMATIKA

Autorka/autor testa ....

Recenzentkinja/recenzent ....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA RAD

Drage učenice i učenici,

Čestitamo! Uspjeli ste da dođete na državno takmičenje iz matematike i samim tim ste već napravili veliki uspjeh. Zato zadatke koji su pred vama posmatrajte kao interesantne probleme i potrudite se da ih rješavate s punom pažnjom i zalaganjem, ali i sa uživanjem.

Redoslijed izrade zadataka nije bitan. Ako vam je neki zadatak suviše težak, nemojte se na njemu dugo zadržavati, već pređite na sljedeći. Ukoliko vam bude preostalo vremena, vratite se i pokušajte uraditi zadatke koje nijeste rješavali.

Pišite čitko, naročito brojeve!

Radite samostalno. Nijesu dozvoljena nikakva dogovaranja.

U radu možete koristiti hemijsku olovku i školski pribor za crtanje geometrijskih figura, ali nije dozvoljeno upotreba mobilnih telefona, kalkulatora i bilo kojih drugih elektronskih pomagala.

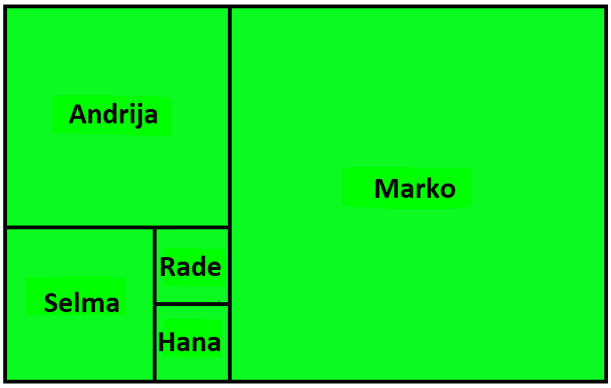
Za svaki zadatak je predviđeno po 25 bodova.

Za rad imate 180 minuta.

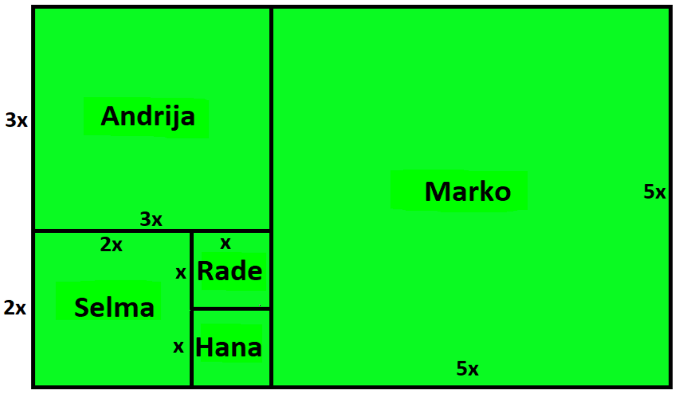
Počnite sa radom.

Srećno!

1. Pravougaona parcela se sastoji od 5 kvadratnih parcela čiji su vlasnici Marko, Andrija, Selma, Hana i Rade (pogledati sliku). Hanina i Radova parcela su jednake veličine. Svi žele da pokose svoje parcele i za taj posao su angažovali Stefana. Stefan ima standarnu cijenu za jedinice površine, s tim što je Radu tražio duplo više novca nego ostalima po jedinici površine zbog neravnog terena i velike količine kamena na njegovoj parceli. Poznato je da je Rade troškove kosidbe platio 60 eura. Odrediti troškove pojedinačno za ostale vlasnike parcela.



RJEŠENJE:
Označimo sa x dužinu Radove kvadratne parcele, tada na osnovu uslova zadatka i Hanina parcela ima dužinu x. Sa slike uočavamo da Selmina, Andrijina i Markova parcela imaju dužine $2x, 3x$ i $5x$ redom.



Površina Radove parcele je x^2 i troškovi kosidbe za njegovu parcelu su bili dvostruko veći od standarnih troškova i iznosili su 60€. Zaključujemo da je standarna cijena za parcelu površine x^2 jednaka 30€. Dakle, Hanini troškovi su 30€.

Površina Selmine parcele je $(2x)^2 = 4x^2$, pa zaključujemo da je Selma platila $4 \cdot 30€ = 120€$. Slično, površina Andrijine i Markove parcele je $9x^2$ odnosno $25x^2$ pa su oni platili $9 \cdot 30€ = 270€$ odnosno $25 \cdot 30€ = 750€$.

2. Neki četvorocifreni broj je 102 puta veći od zbira njegovih cifara. Dokazati da je taj broj djeljiv sa 9, a zatim odrediti koji je to broj.

RJEŠENJE:

Neka je $x = \overline{ABCD}$ traženi broj. Po uslovu zadatka važi

$$x = 102(A + B + C + D) = 3 \cdot 34(A + B + C + D),$$

što znači da je broj x djeljiv sa 3. Odatle slijedi da je zbir njegovih cifara takođe djeljiv sa 3 tj. $A + B + C + D = 3k$, pa je

$$x = 3 \cdot 34(A + B + C + D) = 3 \cdot 34 \cdot 3k = 9 \cdot 34k.$$

Onda je broj x djeljiv sa 9, pa je i zbir njegovih cifara djeljiv sa 9. Moguća su 4 slučaja.

1) $A + B + C + D = 9 \Rightarrow\ x = 102 \cdot 9 = 918$
2) $A + B + C + D = 18 \Rightarrow\ x = 102 \cdot 18 = 1836$
3) $A + B + C + D = 27 \Rightarrow\ x = 102 \cdot 27 = 2754$
4) $A + B + C + D = 36 \Rightarrow\ x = 102 \cdot 36 = 3672.$

Prvi slučaj odbacujemo jer je 918 trocifren broj. Treći i četvrti slučaj takođe odbacujemo jer zbir cifara brojeva 2754 i 3672 nije jednak 27 odnosno 36. Zaključujemo da je traženi broj 1836.

3. Ana je zamislila trocifren broj x, zatim mu je dodala zbir brojeva y i z. Broj y je dobila tako što je broju x obrisala cifru stotina a broj z tako što je broju y obrisala cifru desetica. Kao rezultat je dobila četvrorocifreni broj čiji se zapis završava sa 24. Koji broj je zamislila Ana?

RJEŠENJE:

Ana je zamislila trocifren broj x, onda je x oblika $\overline{ABC}$, gdje su A, B i C cifre i $A \neq 0$. Iz uslova zadatka zaključujemo da y i z imaju oblik $\overline{BC}$ i $\bar{C}$ redom. Takođe Iz uslova zadatka važi

$$x + y + z = \overline{ABC} + \overline{BC} + \bar{C} = \overline{DE24}\ ,$$

gdje su $D\ i\ E$ nepoznate cifre i $D \neq 0$. Postoje tri moguća slučaja

$$3C = \begin{cases} 4 \\ 14 \\ 24 \end{cases}$$

Prva dva slučaja odbacujemo jer 3 ne dijeli ni 4 ni 14. Dakle, $3c = 24$, tj. $c = 8$. Zbog prenosa dalje zaključujemo da su mogući slučajevi

$$2B + 2 = \begin{cases} 2 \\ 12 \end{cases}$$

Slučaj $2B + 2 = 2$ odbacujemo jer suma $x + y + z$ ne bi mogla biti četvorocifren broj ako nema prenosa. Dakle, $2B + 2 = 12$, tj. $B = 5$ (prenos 1). Dalje, direktno zaključujemo da A mora biti jednako 9 da bi sa prenosom 1 dobili četvorocifren broj. Ana je zamislila broj 958.

4. Nikola ima gomilu karata koja sadrži samo kraljeve, dame, asove i žandare. Trenutno je sam u učionici i počeo je da postavlja karte u red, jednu do druge, licem okrenute prema stolu. Prvo je postavio sve žandare. Zatim je na početak i kraj reda i između svaka dva žandara postavio po jednu damu. Nakon toga je između svake dvije karte smjestio po jednog kralja. Konačno, između svakog kralja i dame je postavio po jednog asa. U tom trenutku je postavljena 241 karta i dolazi Nikolin drug Marko. Marko želi da zna koliko ima kraljeva među postavljenim kartama i koji se tip karte nalazi na 90. poziciji (slijeva na desno). Tvoj zadatak je da, koristeći gore date informacije, pomogneš Marku da sazna odgovore na ta pitanja.

RJEŠENJE:

Pretpostavimo da se u gomili nalazi x žandara. Na početku u redu je poređano svih x žandara.

$$\underbrace{\check{Z}\,\check{Z}\ldots\check{Z}}_{x}$$

Zatim je Nikola između svaka dva žandara i na početak i kraj reda postavio po jednu damu. Tim potezom je u red dodata $x+1$ dama.

$$\underbrace{D\,\check{Z}\,D\;\check{Z}\;\ldots\;D\,\check{Z}\,D}_{x+(x+1)=2x+1}$$

Nakon toga je između svake dvije karte smjestio po jednog kralja. Kako je trenutno redu ukupno $2x+1$ karta, tim postupkom je u red dodato $2x$ karata.

$$\underbrace{D\,K\,\check{Z}\,K\,D\,K\,\check{Z}\,K\;\ldots\;D\,K\,\check{Z}\,K\,D}_{(2x+1)+2x=4x+1}$$

Uočimo da se do sada postavljene karte sastoje od x uzastopnih blokova oblika DKŽK, osim tih x blokova na kraju reda se nalazi još jedna dama.

$$\underbrace{D\,K\,\check{Z}\,K}\;\underbrace{D\,K\,\check{Z}\,K}\;\ldots\;\underbrace{D\,K\,\check{Z}\,K}\;D$$

Nakon toga Nikola je između svake dame i kralja postavio po jednog asa. Primjetimo da tim postupkom Nikola unutar i ispred svakog bloka dodaje po jednog asa

$$\underbrace{D\,\boldsymbol{A}\,K\,\check{Z}\,K}\;\boldsymbol{A}\;\underbrace{D\,\boldsymbol{A}\,K\,\check{Z}\,K}\boldsymbol{A}\ldots\;\underbrace{D\,\boldsymbol{A}\,K\,\check{Z}\,K}\;\boldsymbol{A}\,D$$

Postoji ukupno x DKŽK blokova, pa je prethodnim postupkom u red dodato $2x$ kara-ta, za svaki blok po 2 asa. Dakle, na kraju se u redu nalazilo $(4x+1)+2x=6x+1$ karata. Iz uslova zadatka dobijamo

$$6x+1=241 \Rightarrow x=40$$

Ranije smo zaključili da je postavljeno $2x=80$ kraljeva. Na kraju se poređane karte sastoje od x blokova "$D\;A\;K\;\check{Z}\;\;K\;A$" dužine 6, osim tih blokova na kraju reda se nala-zi još jedna dama . Na svim rednim pozicijama djeljivim sa 6 se nalazi as. Pošto je 90 djeljivo sa 6, zaključujemo da se na 90. poziciji nalazi as.