ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2021.

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

Autorka/autor testa ....

Recenzentkinja/recenzent ....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	1.	2.	3.	4.
Maksimalan broj poena	**25**	**25**	**25**	**25**

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Naći sve parove prirodnih brojeva a i b za koje važi

$$NZS(a,b) = NZD(a,b) + 19.$$

$NZS(a,b)$ je najmanji zajednički sadržalac brojeva a i b, a $NZD(a,b)$ je najveći zajednički djelilac brojeva a i b.

2. Na težišnoj duži AM trougla ABC izabrana je tačka K takva da je $AK = BM$. Pored toga je $\angle AMC = 60^\circ$. Dokazati da važi $AC = BK$.

3. Kvadratna tabla dimenzije 5x5 podijeljena je na 25 malih kvadratića dimenzije 1x1. Koliki je minimalan broj malih kvadratića koje treba obojiti obojiti tako da svaki kvadrat dimenzije 3x3 sadrži tačno 4 obojena kvadratića?

4. Neka su x, y i z racionalni brojevi takvi da su $x + y^2 + z^2$, $x^2 + y + z^2$ i $x^2 + y^2 + z$ cijeli brojevi. Dokazati da je $2x$ cio broj.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Označimo $s = NZS(a,b), d = NZD(a,b)$. Očigledno $d|s$, pa je $s = kd$ za neko $k \in N$. Uvrštavanjem u jednačinu dobijamo

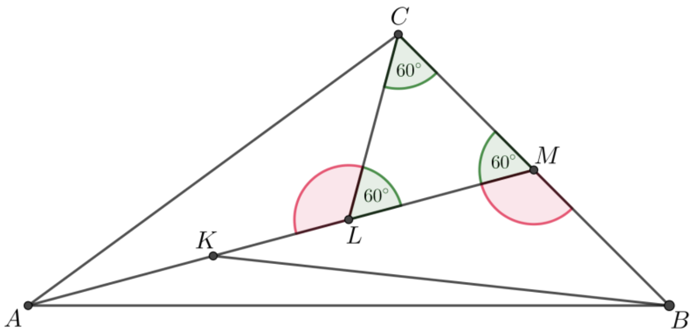
$$kd = d + 19$$

odnosno

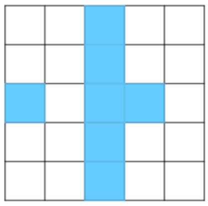
$$d(k-1) = 19.$$

Kako je 19 prost broj, mora važiti $d = 19$ i $k - 1 = 1$ ili $d = 1$ i $k - 1 = 19$.
U prvom slučaju je $d = 19$ i $s = 38$, pa a i b moraju biti 38 i 19, dok je u drugom slučaju $d = 1$ i $s = 20$, pa a i b moraju biti 4 i 5.
Dakle, traženi parovi su $a = 19, b = 38$ i $a = 4, b = 5$.

2. Na težišnoj duži AM izaberimo tačku L takvu da je $LM = BM$. Kako je tada $LM = CM$ i $\angle LMC = 60°$, to je trougao CML jednakostranični, pa je $CL = CM = BM$. Dalje, kako je $LM = AK$, to je $AL = KM$. Takođe, $\angle ALC = \angle KMB = 120°$, pa su po stavu SUS trouglovi ALC i KMB podudarni. Odavde slijedi da je $KB = AC$, što je i trebalo dokazati.

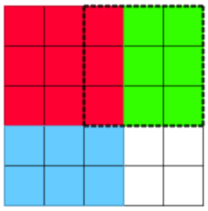


3. Minimalan broj obojenih kvadratića je 7 (slika 1.). Dokažimo da ne možemo obojiti 6 kvadratića tako da uslovi zadatka budu ispunjeni.



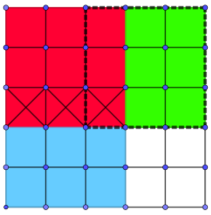
Slika 1

U crvenom kvadratu dimenzija 3x3 na slici 2 se moraju naći tačno 4 obojena kvadratića, pa u plavom i zelenom pravougaoniku zajedno mogu biti najviše 2 obojena kvadratića. Ako su oba obojena kvadratića u plavom pravougaoniku, u zelenom pravougaoniku nema obojenih kvadratića, pa u kvadratu dimenzija 3x3 koji je označen isprekidanim linijama mogu biti najviše 3 obojena kvadratića što je suprotno uslovima zadatka.



Slika 2

Ako se u plavom pravougaoniku nalazi tačno jedan obojeni kvadratić, označena polja crvenog kvadratića moraju biti obojena (slika 3), pa se opet u kvadratu dimenzija 3x3 označenom isprekidanim linijama mogu naći najviše 3 obojena kvadratića. Dakle, nije moguće obojiti 6 kvadratića tako da uslovi zadatka budu ispunjeni.



Slika 3

4. Zapišimo $x = \frac{a}{D}$, $y = \frac{b}{D}$ i $z = \frac{c}{D}$, gdje je D najmanji zajednički sadržalac imenilaca razlomaka x, y i z. Očigledno je $NZD(a, b, c, D) = 1$, inače bi mogli skratiti sva tri razlomka istim djeliocem.

Kako je $x^2 + y^2 + z = \frac{a^2+b^2+cD}{D^2}$ cio broj, to je $a^2 + b^2 + cD$ djeljiv sa D^2, pa je $a^2 + b^2$ djeljiv sa D. Analogno dobijamo da su $b^2 + c^2$ i $a^2 + c^2$ djeljivi sa D. Odavde dobijamo da je

$$2c^2 = (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)$$

djeljiv sa D. Analogno, $2a^2$ i $2b^2$ su djeljivi sa D.

Dokažimo sada da je D jednako 1 ili 2. Pretpostavimo da je $D > 2$. Tada postoji prost broj $p > 2$ takav da $p|D$ ili je $D = 2^k, k > 1$. U prvom slučaju, kako $D|2a^2$, $D|2b^2$, $D|2c^2$ i $p > 2$, to $p|a$, $p|b$ i $p|c$, pa je $NZD(a, b, c, D) \geq p > 1$, čime dolazimo do kontradikcije. U drugom slučaju, $4|D = 2^k$, pa $2|a$, $2|b$ i $2|c$, odnosno $NZD(a, b, c, D) \geq 2 > 1$, čime opet dolazimo do kontradikcije. Dakle, $D = 1$ ili $D = 2$, pa je $2x = \frac{2a}{D}$ cio broj.