ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2013.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA

FIZIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO UČENICIMA

Redni broj zadatka		Broj bodova
1		**20**
2		**20**
3	**a**	**10**
	b	**10**
4	**a**	**10**
	b	**10**
5		**20**
UKUPNO		**100**

Vrijeme za rad: **240 minuta.**

Pribor za rad: kalkulator, geometrijski pribor i hemijska olovka .

Zadaci

Slika 1.

1. Koji je najmanji ugao (prema horizontu) pod kojim je košarkaš Nikola Andrijin Ivanović (slika 1) morao da izbaci loptu da bi ona prošla kroz obruč a da ga ne dodirne?

U trenutku izbacivanja lopte, sekundu do kraja utakmice, Nikola je bio na rastojanju $d = 14$ m od obruča, a loptu je izbacio sa visine $h = 2$ m iznad parketa.

Poluprečnik lopte r je dva puta manji od poluprečnika obruča R ($R = 2r$) koji je na visini $H = 3$ m iznad parketa. Zanemariti otpor vazduha i promjenu brzine lopte pri njenom prolasku kroz obruč.

2. U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se $V = 9\ \mathrm{dm}^3$ smješa dvoatomskog vodonika i jednoatomskog helijuma. Cilindar je punjen ovom smješom pod stalnim pritiskom od $p=10^6$ Pa i konstantnom temperaturom $T_0 = 300\ \mathrm{K}$. Zapremina koju bi na ovoj temperaturi i pritisku punjenja imao vodonik, dva puta je veća od odgovarajuće zapremine helijuma.

Smatrajući da se na smješu i njene komponente mogu primijeniti zakoni idealnog gasa, odrediti rad koji je potrebno izvršiti pri adijabatskom sabijanju da bi se temperatura smješe povisila na $T = 500\ \mathrm{K}$.

3. a) Svaki od *2013* različitih otpornika otpornosti R_1, R_2, …, R_{2013} vezan je jednim krajem na zajednički čvor *A*.

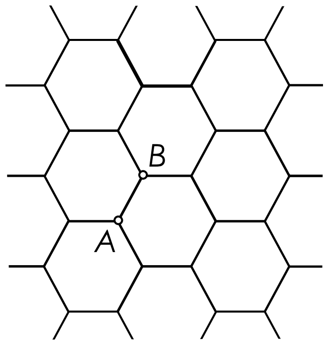
Drugi kraj otpornika 1 vezan je za tačku B_1 čiji je potencijal φ_1, drugi kraj otpornika 2 vezan je za tačku B_2 potencijala φ_2, …, drugi kraj *2013*-tog otpornika za tačku B_{2013} potencijala φ_{2013} .

Potencijali φ_1, φ_2,…, φ_{2013} mjere se u odnosu na zajedničku nulu.

Odrediti potencijal tačke *A*.

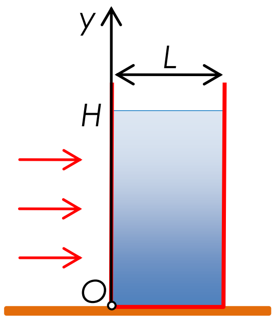
b) Na slici 2. je prikazana beskonačna mreža čiji segmenti imaju oblik pravouglog šestougla. Otpor provodnika između dva susjedna čvora je $r = 0{,}6\,\Omega$.

Koliki je ekvivalentni otpor ove mreže između tačaka *A* i *B*?



Slika 2.

4. a) Providni sud pravougaonog oblika napunjen je rastvorom čija gustina zavisi od visine y (slika 3). Snop paralelnih zraka monohromatske svjetlosti pada normalno na lijevu stranu suda. Zavisnost indeksa prlamanja rastvora za datu svjetlost od visine y ima oblik



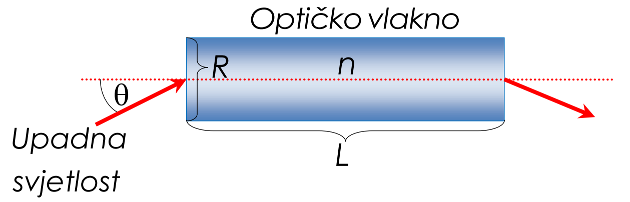
Slika 3.

$$n(y) = n_1 - \frac{n_1 - n_2}{H} y,$$

gdje su $n_1 = 1{,}4$, $n_2 = 1{,}1$ i $H = 0{,}2\,\mathrm{m}$ odgovarajuće konstante. Širina suda je $L = 0{,}1\,\mathrm{m}$.

Primjenom Hajgensovog principa odrediti ugao otklona svjetlosti.

b) Optički kabl koristi se u telekomunikacijama za prenos signala. Prenosna sredina je optičko vlakno, a informacija se prenosi putem svjetlosti. Pri ulasku u optičko vlakno električni signal se pretvara u svjetlost, a pri izlasku iz vlakna prenesena svjetlost se opet pretvara u električni signal. Tehnolozi streme vlaknu kroz koje će sva upadna svjetlost biti prenešena bez gubitaka (idealni slučaj).



Slika 4.

U najjednostavnijoj konfiguraciji optičko vlakno je cilindričnog oblika. Svjetlost koja se prostire paralelno osi cilindra će biti prenešena bez gubitaka, ukoliko zanemarimo refleksiju na ravnoj površi vlakna. Povećavanjem ugla između pravca prostiranja svjetlosti i glavne ose cilindra, u jednom trenutku gubici će postati preveliki i vlakno više neće služiti svrsi. Ukoliko je indeks prelamanja materijala od kog je napravljeno vlakno n, odrediti najveći ugao između pravca prostiranja svjetlosti i ose vlakna za koje vlakno i dalje služi svrsi.

Izračunati broj refleksija po jednici dužine kabla ako je prečnik poprečnog presjeka vlakna D = 25 μm, indeks prelamanja n = 1,6, a upadni ugao svjetlosti $\theta = 30°$. Pretpostaviti da je vlakno veoma dugo.

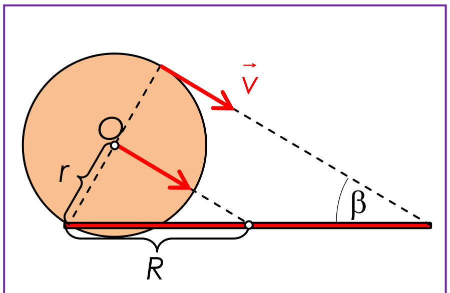
5. Čestica se kreće brzinom $V = 0{,}8\,c$ i raspadne se na dva fotona (c - brzina svjetlosti u vakuumu).

Odrediti minimalni ugao koji zaklapaju pravci kretanja ova dva fotona.

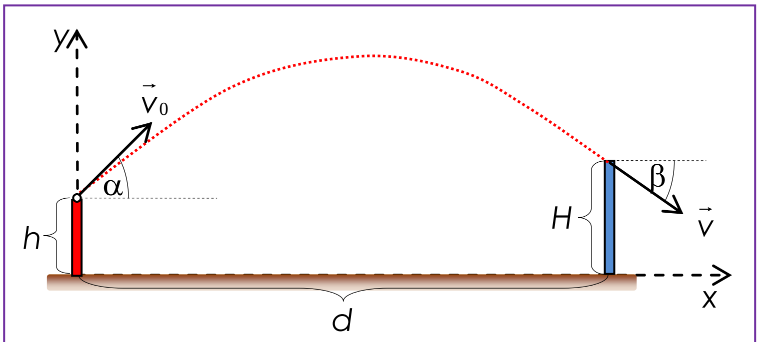
Rješenja

1. Za uslov minimalnog ugla α bacanja lopte, lopta će proći neposredno pored prednjeg i zadnjeg dijela obruča. Tada je (sl. 5)

$$sin\beta = \frac{r}{R}. \quad \boxed{5\text{ b}}$$



Slika 5.



Slika 6.

Ako je t vrijeme leta lopte od igrača do obruča, a intenzitet njene brzine u trenutku izbacivanja v_0, onda je (sl. 6)

$$d = v_0 t\cos\alpha \quad \boxed{2\text{ b}}$$

$$H - h = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad \boxed{2\text{ b}}$$

Pri prolasku kroz obruč, horizontalna komponenta brzine lopte je

$$v_x = v_0\cos\alpha \quad \boxed{2\text{ b}}$$

a vertikalna

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt. \quad \boxed{2\text{ b}}$$

Pri tome je

$$tg\beta = -\frac{v_y}{v_x}. \quad \boxed{2\text{ b}}$$

Rješavanjem dobijenog sistema jednačina dobija se da je

$$\alpha = arctg\left(2\frac{H-h}{d} + \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right) \quad \boxed{3\text{ b}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{5}\text{ rad} \quad \text{ili} \quad \alpha = 36^\circ. \quad \boxed{2\text{ b}}$$

2. Na osnovu I principa termodinamike, slijedi da je za adijabatski proces

$$A = -\Delta U. \quad \boxed{1\text{ b}}$$

Promjena unutrašnje energije ΔU jednaka je zbiru promjena unutrašnjih energija komponenata gasne smješe

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2, \quad \boxed{3\text{ b}}$$

odnosno

$$\Delta U = n_{m1}C_{V1}(T - T_0) + n_{m2}C_{V2}(T - T_0)$$

ili

$$\Delta U = (T - T_0)(n_{m1}C_{V1} + n_{m2}C_{V2}). \quad \boxed{3\text{ b}}$$

Toplotni kapacitet dvoatomskog vodonika je $C_{V1}=\frac{5}{2}R$, a jednoatomskog helijuma $C_{V2}=\frac{3}{2}R$. $\boxed{2\text{ b}}$

Kako bi pri pritisku punjenja p i temperaturi T_0, vodonik imao zapreminu V_1, koja je dva puta veća od zapremine helijuma V_2, važi

$$V_1=\frac{2}{3}V \quad \text{i} \quad V_2=\frac{1}{3}V, \qquad \boxed{4\text{ b}}$$

jer je ukupna zapremina cilindra $V=V_1+V_2$.

Iz jednačina stanja za vodonik i helijum pod navedenim uslovima

$$pV_1=n_{m1}RT_0 \quad \text{i} \quad pV_2=n_{m2}RT_0 \quad \boxed{2\text{ b}}$$

slijedi

$$n_{m1}=\frac{2pV}{3RT_0} \quad \text{i} \quad n_{m2}=\frac{pV}{3RT_0}.$$

Konačno je

$$\Delta U=\frac{13}{6}pV\frac{T-T_0}{T_0} \quad \boxed{2\text{ b}}$$

$$\Delta U=13\,\text{kJ} \quad \boxed{1\text{ b}}$$

Spoljašnja sredina je izvršila rad od

$$A=-13\,\text{kJ}. \quad \boxed{2\text{ b}}$$

3. **a)** Neka kroz *i*-ti otpornik teče struja jačine

$$I_i=\frac{\varphi_i-\varphi_A}{R_i}. \quad \boxed{4\text{ b}}$$

Algebarski zbir jačina struja koje uviru i izviru iz čvora *A* je jednak nuli. Zbog toga je

$$0=\sum_{i=1}^{2013}I_i=\sum_{i=1}^{2013}\frac{\varphi_i}{R_i}-\varphi_A\sum_{i=1}^{2013}\frac{1}{R_i}. \quad \boxed{5\text{ b}}$$

Odavde je

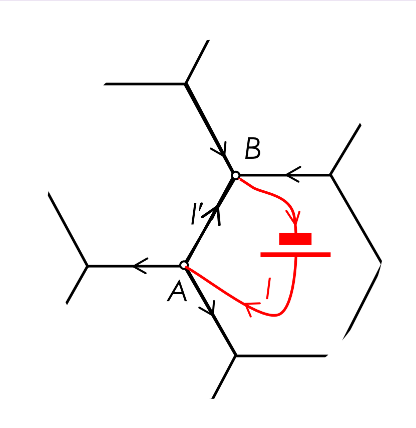
$$\varphi_A=\frac{\frac{\varphi_1}{R_1}+\frac{\varphi_2}{R_2}+\ldots+\frac{\varphi_{2013}}{R_{2013}}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_{2013}}}. \quad \boxed{1\text{ b}}$$

b) Napon između tačaka A i B (sl.7) je

$$U_{AB} = R_{ekv}I = rI', \boxed{2\text{ b}}$$

gdje je I' jačina struje kroz provodnik AB i može se smatrati zbirom dvije struje.

Ako bi struja jačine I samo „uvirala" u tačku A, ona bi se ravnomjerno podijelila na tri provodnika koji se povezani u tom čvoru, tako da bi kroz provodnik AB proticala struja jačine $I/3$. $\boxed{3\text{ b}}$



Slika 7.

Isto tako, ako bi struja samo „izvirala" iz tačke B prema negativnom polu izvora, nju bi činile tri struje jednake jačine $I/3$, koje „uviru" u čvor B.

Zbir ove dvije struje je ukupna struja I':

$$I' = \frac{I}{3} + \frac{I}{3} = \frac{2I}{3}, \boxed{2\text{ b}}$$

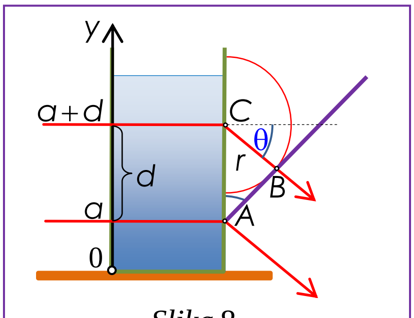
tako da je

$$R_{ekv}I = r \cdot \frac{2}{3}I$$

$$R_{ekv} = \frac{2}{3}r \boxed{2\text{ b}}$$

$$R_{ekv} = 0{,}4\,\Omega. \boxed{1\text{ b}}$$

4. **a)** Pošto je sredina nehomogena, onda se snop svjetlosti ne može zamijeniti jednim svjetlosnim zrakom. Međutim, snop se može podijeliti na zrake male debljine Δy i smatrati da se svaki od njih prostire kroz homogenu sredinu indeksa prelamanja $n(y)$. Tada svaki zrak za „svoje" vrijeme dolazi do desne strane suda, pobuđuje sekundarni talas i učestvuje u „konstituisanju" talasnog fronta prelomljene svjetlosti.



Slika 8.

Dva zraka imaju koordinate $y' = a$ i $y'' = a + d$, gdje je d debljina snopa (sl. 8). Vrijeme za koje zrak koordinate a prođe kroz sredinu debljine L je

$$t' = \frac{n(y') \cdot L}{c} = \left(n_1 - \frac{n_1 - n_2}{H}a\right)\frac{L}{c}, \boxed{2\text{ b}}$$

gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu.

Analogno se određuje vrijeme prolaska zraka koordinate $y'' = a + d$:

$$t'' = \frac{n(y'') \cdot L}{c} = \left[n_1 - \frac{n_1 - n_2}{H}(a + d)\right]\frac{L}{c}. \boxed{1\text{ b}}$$

Očigledno je $t' > t''$, pa se drugi sekundarni talas u toku intervala $t' - t''$ pređe rastojanje r,

$$r = \overline{CB} = c(t' - t'') = \frac{n_1 - n_2}{H}dL. \boxed{4\text{ b}}$$

Ugao otklona talasnog fronta AB ($\theta = \angle CAB$) može se odrediti iz odnosa

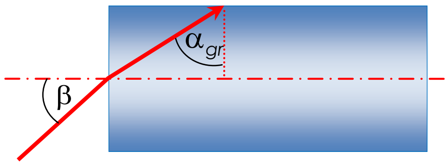
$$\sin\theta = \frac{r}{d} = \frac{n_1 - n_2}{H} L .$$

Slijedi

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n_1 - n_2}{H} L\right) \quad \boxed{2\text{ b}}$$

$$\theta = \arcsin 0{,}15 \; = 0{,}15\,\text{rad ili} \quad \theta = 9^\circ\, 34' . \quad \boxed{1\text{ b}}$$

b) Svjetlost će biti prenesena bez gubitaka, ukoliko je, pošto uđe u kabl, upadni ugao na granici vlakno-vazduh veći ili jednak graničnom uglu totalne refleksije:



Slika 9.

Ako je indeks prelamanja materijala od kog je napravljeno vlakno n, granični ugao totalne refleksije određen je jednačinom (sl. 9)

$$n \sin\alpha_{gr} = 1 . \quad \boxed{1\text{ b}}$$

Zakon prelamanja svjetlosti na granici vazduh-vlakno je

$$\sin\beta = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{gr}\right) = n \cos\alpha_{gr} . \boxed{1\text{ b}}$$

Dakle, granični upadni ugao svjetlosti je:

$$\beta = \arcsin\left[n \cos\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)\right] . \quad \boxed{1\text{ b}}$$

Ako je dužina kabla L, dužina puta koji svjetlost pređe kroz kabl je:

$$d = \frac{L}{\cos\theta_{PR}} , \quad \boxed{2\text{ b}}$$

gdje je θ_{PR} prelomni ugao za upadni ugao θ. Koristeći jednakosti

$$\cos\theta_{PR} = \sqrt{1 - \sin^2\theta_{PR}}$$

$$n \sin\theta_{PR} = \sin\theta \qquad \text{(zakon prelamanja)}$$

dobija se izraz za d:

$$d = \frac{nL}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} . \quad \boxed{1\text{ b}}$$

Broj refleksija unutar kabla je

$$N = \frac{d \sin\theta_{PR}}{D} . \quad \boxed{3\text{ b}}$$

Konačno, broj refleksija po jedinici dužine je:

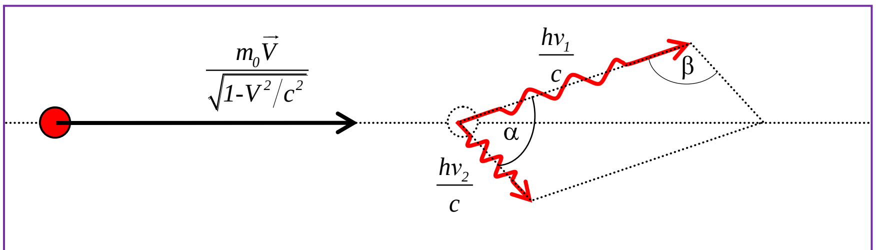
$$\frac{N}{L} = \frac{\sin\theta}{D\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} \approx 13159 \qquad \boxed{1\text{ b}}$$

5. Prema zakonu održanja energije je

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = h\nu_1 + h\nu_2 , \quad \boxed{4\ \text{b}}$$

a iz zakona održanja impulsa (sl.10) je

2 b



Slika 10.

$$\left(\frac{m_0 V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2 = \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 - \frac{2h^2\nu_1\nu_2 \cos\beta}{c^2} \quad \boxed{4\ \text{b}}$$

gdje je $\beta = \pi - \alpha$.

Kada se uvrsti vrijednost $V=0,8\,c$ i druga jednačina pomnoži sa c, dobija se da je:

$$\frac{5}{3} m_0 c^2 = h\nu_1 + h\nu_2 \ \text{ i}$$

$$\frac{16}{9} m_0^2 c^4 = (h\nu_1)^2 + (h\nu_2)^2 + 2h^2\nu_1\nu_2 \cos\alpha$$

Druga jednačina se može napisati i kao

$$\frac{16}{9} m_0^2 c^4 = (h\nu_1 + h\nu_2)^2 - 2h^2\nu_1\nu_2(1-\cos\alpha).$$

Pošto je zbir energija fotona konstantan i ima vrijednost $5m_0c^2/3$, onda je

$$2h^2\nu_1\nu_2(1-\cos\alpha) = m_0^2 c^4$$

ili

$$1-\cos\alpha = \frac{m_0^2 c^4}{2h^2\nu_1\nu_2}. \quad \boxed{4\ \text{b}}$$

Da bi ugao između pravaca (dva fotona), odnosno vrijednost izraza $1-\cos\alpha$ bila minimalna potrebno je da proizvod $\nu_1\nu_2$ ima maksimalnu vrijednost.

Drugim riječima, potrebno je *odrediti vrijednost ugla* α *za koju će vrijednost proizvoda* $\nu_1\nu_2$ *biti maksimalma.*

<u>*I način.*</u> Problem se svodi na određivanje maksimuma kvadratne funkcije

$$f(\nu_2) = h\nu_1 h\nu_2 = \left(\frac{5}{3} m_0 c^2 - h\nu_2\right) h\nu_2 = \frac{5}{3} m_0 c^2 h\nu_2 - h^2\nu_2^2 .$$

Konstrukcijom grafika funkcije $f(\nu_2)$ vidi se da njena maksimalna vrijednost (tjeme grafika funkcije) odgovara slučaju kada je $\nu_1 = \nu_2 = \frac{5}{6}\frac{m_0 c^2}{h}$.

II način. Iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dvije pozitivne veličine

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

slijedi da proizvod xy ima maksimalnu vrijednost kada je $x = y$. Dakle, proizvod $\nu_1 \nu_2$ ima maksimalnu vrijednost kada je $\nu_1 = \nu_2$.

III način. Iz

$$\frac{df(\nu_2)}{d\nu_2} = 0$$

određuje se maksimum funkcije $f(\nu_2) = \frac{5}{3} m_0 c^2 h \nu_2 - h^2 \nu_2^2$.

Konačno, dobija se da je

$$1 - cos\,\alpha_{min} = \frac{18}{25} = 0{,}72$$

ili

$$\alpha_{min} = arccos\,0{,}28 \qquad \boxed{6\text{ b}}$$

$$\alpha_{min} \approx 47^{\circ}.$$