



ispitni centar

PRAVA
MJERA
ZNANJA

DRŽAVNO
TAKMIČENJE

2019.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA



Test pregledala/pregledao

.....

.....

Podgorica, 20..... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **240 minuta**.
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	1.	2.	3.	4.
Maksimalan broj poena	25	25	25	25

- Pribor za rad: **hemijska olovka**.

SREĆNO!

ZADACI

1. Da li postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$\sqrt[n]{\frac{m}{3^n - m}}$$

prirodan broj? Odgovor detaljno obrazložiti.

2. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao sa $AB = BD$ i $CD = DA$. Neka je X tačka presjeka bisektrise ugla $\angle ADB$ i stranice AB i Y tačka presjeka bisektrise ugla $\angle CDB$ i stranice BC . Ako je $AB = a$ i $CD = b$ izračunati dužinu poluprečnika opisanog kruga trougla DXY .

3. Odrediti sve polinome $P(x)$ stepena ≥ 2 , tako da su za sve $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{R}$ za koje važi $s_1 + s_2 + s_3 = 0$, tačke $(s_1, P(s_1))$, $(s_2, P(s_2))$ i $(s_3, P(s_3))$ kolinearne.

4. Za skup S , $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, kažemo da je **zanimljiv** ako je najmanji element skupa S jednak broju elemenata u skupu S . Na primjer, skup $S = \{3, 7, 8\}$ je zanimljiv. Označimo sa d_n broj svih zanimljivih podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokazati da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi nejednakost

$$\sqrt[n]{d_{n+2}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{d_{n+1}}},$$

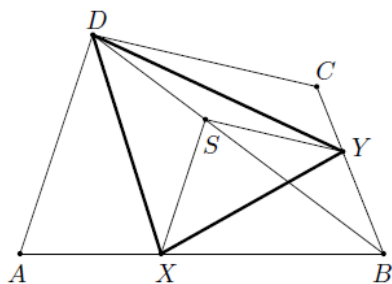
RJEŠENJA ZADATAKA

1. Pretpostavimo da postoje $m, n, k \in \mathbf{N}$ tako da je

$$\sqrt{\frac{m}{3^n - m}} = k.$$

Tada je $\frac{m}{3^n - m} = k^2$, odnosno $m \cdot (k^2 + 1) = k^2 \cdot 3^n$. Kako je $\text{NZD}(k^2, k^2 + 1) = 1$, to slijedi da $k^2 + 1$ dijeli 3^n , tj. $k^2 + 1 = 3^s$ za neko $s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dobijamo da važi $k^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, odnosno $k^2 \equiv 2 \pmod{3}$, a to nije moguće, jer kvadrat prirodnog broja daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju sa 3. Dakle, ni za jedan par prirodnih brojeva (m, n) broj $\sqrt{\frac{m}{3^n - m}}$ nije prirodan.

2. Koristeći teoremu o bisektrisi dobijamo



$$\frac{DA}{DB} = \frac{AX}{XB} \quad \text{i} \quad \frac{DB}{DC} = \frac{BY}{YC}.$$

Slijedi da je

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AX}{XB} \quad \text{i} \quad \frac{CD}{DB} = \frac{YC}{BY},$$

pa dobijamo

$$\frac{BX}{XA} = \frac{BY}{YC}, \text{ a to na osnovu obrnute}$$

Talesove teoreme povlači da je $XY \parallel AC$.

Povucimo kroz X pravu paralelnu sa AD i neka je S presjek ove prave sa BD. Tada važi

$$\angle ADX = \angle BDX \quad \text{i} \quad \angle ADX = \angle DXS,$$

pa je trougao DXS jednakokraki sa $SX = SD$.

Kako je trougao ABD jednakokraki, to je $AX = SD$ i $XB = SB$.

Slijedi,

$$\frac{BY}{YC} = \frac{XB}{AX} = \frac{BS}{SD} \Rightarrow YS \parallel CD,$$

pa je $\angle SDY = \angle YDC = \angle SYD$, a to povlači da je trougao SYD jednakokraki sa $SY = SD$. Dobili smo da važi $SX = SY = SD$, pa je S centar opisanog kruga trougla DXY.

Kako je

$$\frac{AX}{BX} = \frac{b}{a}, \quad AX + XB = a \quad \text{i} \quad SD = AX,$$

$$\text{to slijedi } SD \cdot \left(1 + \frac{a}{b}\right) = a, \text{ odnosno } SD = \frac{ab}{a+b}.$$

- 3.** Tačke $(s_1, P(s_1))$, $(s_2, P(s_2))$ i $(s_3, P(s_3))$ su kolinearne ako i samo ako važi

$$(s_1 - s_2) \cdot P(s_3) + (s_2 - s_3) \cdot P(s_1) + (s_3 - s_1) \cdot P(s_2) = 0. \quad (1)$$

Uočimo da polinomi stepena 0 i 1 zadovoljavaju uslove zadatka.

Neka su $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{R}$ takvi da je $s_1 + s_2 + s_3 = 0$. Tada važi

$$\begin{aligned} & (s_1 - s_2) \cdot s_3^3 + (s_2 - s_3) \cdot s_1^3 + (s_3 - s_1) \cdot s_2^3 \\ &= -(s_1 - s_2) \cdot (s_1 + s_2)^3 + (2s_2 + s_1) \cdot s_1^3 - (2s_1 + s_2) \cdot s_2^3 \\ &= (-1 + 1) \cdot s_1^4 + (-3 + 1 + 2) \cdot s_1^3 s_2 + (-3 + 3) \cdot s_1^2 s_2^2 + (-1 + 3 - 2) \cdot s_1 s_2^3 + (1 - 1) \cdot s_2^4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Slijedi, polinom $P(x) = x^3$ zadovoljava uslove zadatka. Dakle, polinomi oblika $P(x) = ax^3 + bx + c$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbf{R}$, zadovoljavaju uslove zadatka.

Dokažimo da nema drugih rješenja.

I način.

Ako bi polinom $P(x) = x^k$, $k \geq 2$ je paran broj, bio rješenje, onda bi za sve $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$ moralo važiti

$$0 = (s_1 - s_2) \cdot (s_1 + s_2)^k + (2s_2 + s_1) \cdot s_1^k - (2s_1 + s_2) \cdot s_2^k.$$

Koeficijent uz s_1^{k+1} polinoma od dvije promjenljive na desnoj strani u prethodnoj jednakosti je jednak 2, pa data jednakost nije tačna.

Ako pretpostavimo da postoji polinom parnog stepena n , koji je rješenje:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0,$$

dobijamo da mora važiti $a_n = 0$, pa slijedi da polinomi parnog stepena nijesu rješenja.

Ako bi polinom $P(x) = x^k$, $k \geq 5$ je neparan broj, bio rješenje, onda bi za sve $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$ moralo važiti

$$0 = -(s_1 - s_2) \cdot (s_1 + s_2)^k + (2s_2 + s_1) \cdot s_1^k - (2s_1 + s_2) \cdot s_2^k.$$

Koeficijent uz $s_1^k s_2$ polinoma na desnoj strani u prethodnoj jednakosti je jednak $3 - k$, pa data jednakost nije tačna. Slijedi da polinomi neparnog stepena ≥ 5 nijesu rješenja.

II način.

Ako je polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ rješenje, onda za sve $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$ važi

$$(s_1 - s_2) \cdot P(-s_1 - s_2) + (2s_2 + s_1) \cdot P(s_1) - (2s_1 + s_2) \cdot P(s_2) = 0.$$

Tada, uzimajući na primjer $s_1 = x$ i $s_2 = 2x$ dobijamo relaciju

$$-x \cdot P(-3x) + 5x \cdot P(x) - 4x \cdot P(2x) = 0,$$

iz koje slijedi

$$a_k((-3)^k + 4 \cdot 2^k - 5) = 0, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Neka je $k \geq 2$ paran broj. Tada je

$$(-3)^k + 4 \cdot 2^k - 5 \geq 3^2 + 4 \cdot 2^k - 5 > 0.$$

Neka je $k \geq 5$ neparan broj. Tada važi

$$\begin{aligned} (-3)^k + 4 \cdot 2^k - 5 &= -3^k + 4 \cdot 2^k - 5 \\ &= -(2+1)^k + 4 \cdot 2^k - 5 \\ &= -((2+1)^k - 4 \cdot 2^k + 5) \\ &\leq -\left(2^k + k \cdot 2^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 2^{k-2} - 4 \cdot 2^k + 5\right) \\ &\leq -\left(\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{5 \cdot (5-1)}{8} - 4\right) \cdot 2^k + 5\right) \\ &= -(2^{k+1} + 5) < 0. \end{aligned}$$

Dakle, ako je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ rješenje, onda je $a_k = 0$ za $k \neq 0, 1, 3$.

- 4.** Uočimo da važi $d_1 = d_2 = 1$. Neka je $n > 2$. Sve zanimljive podskupove skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ možemo podijeliti na one koji sadrže n i one koji ne sadrže n . Broj zanimljivih podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji ne sadrže n jednak je broju zanimljivih podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n-1\}$, odnosno broju d_{n-1} .

Ako zanimljiv skup $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ sadrži n , onda $1 \notin S$ (jer $n \in S$ i broj elemenata skupa S je bar 2). U ovom slučaju je $S = S_1 \cup \{n\}$, gdje je $S_1 \subseteq \{2, \dots, n-1\}$, npr. $S_1 = \{a_1, \dots, a_k\}$, tako da je

$$S_2 = \{a_1 - 1, \dots, a_k - 1\}$$

zanimljiv podskup skupa $\{1, 2, \dots, n-2\}$. Slijedi da je broj zanimljivih podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji sadrže n jednak broju zanimljivih podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n-2\}$, odnosno broju d_{n-2} .

Dakle,

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \quad (1)$$

i $d_1 = d_2 = 1$.

Primjenjujući nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine na brojeve $\frac{d_2}{d_3}, \frac{d_3}{d_4}, \dots, \frac{d_{n+1}}{d_{n+2}}$ dobijamo

$$\frac{1}{n} \left(\frac{d_2}{d_3} + \frac{d_3}{d_4} + \dots + \frac{d_{n+1}}{d_{n+2}} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{d_2}{d_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{d_{n+2}}}. \quad (2)$$

Kako je, koristeći jednakost (1), $\frac{d_k}{d_{k+1}} = 1 - \frac{d_{k-1}}{d_{k+1}}$, to je lijeva strana

nejednakosti (2) jednaka $\frac{1}{n} \left(1 - \frac{d_1}{d_3} + 1 - \frac{d_2}{d_4} + \dots + 1 - \frac{d_n}{d_{n+2}} \right)$, pa nakon primjene nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo:

$$1 - \frac{1}{n} \left(\frac{d_1}{d_3} + \frac{d_2}{d_4} + \dots + \frac{d_n}{d_{n+2}} \right) \leq 1 - \sqrt[n]{\frac{d_1 \cdot d_2}{d_{n+1} d_{n+2}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{d_{n+1} d_{n+2}}}. \quad (3)$$

Iz (2) i (3) slijedi

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{d_{n+1} d_{n+2}}} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{d_{n+2}}},$$

što je ekvivalentno traženoj nejednakosti.