

ŠIFRA UČENIKA

## M A T U R S K I I S P I T

JUN 2017.

## MATEMATIKA

## U P U T S T V O

## VRIJEME RJEŠAVANJA TESTA JE 150 MINUTA

**Pribor:** grafitna olovka i gumica, hemijska olovka, geometrijski pribor.  
Upotreba digitrona nije dozvoljena.

**Pažljivo pročitajte uputstvo.**

Ne okrećite stranice i ne rješavajte zadatke dok to ne dozvoli dežurni nastavnik.

Test sadrži 20 zadataka.

Tokom rada možete koristiti formule koje su date na stranama 4 i 5.

Uz test je dat i list za odgovore za zadatke višestrukog izbora. Potrebno je da na odgovarajuće mjesto pažljivo prepisete svoje odgovore za prvih 8 zadataka.

Očekuje se da je kod zadataka otvorenog tipa detaljno napisan postupak rješavanja, da je krajnji rezultat sveden (npr. izvršeno je skraćivanje razlomaka, sabiranje članova iste vrste) i da je napisana odgovarajuća jedinica mjere (kod zadataka iz stereometrije).

**Zadatak će se vrednovati sa 0 bodova ako je:**

- netačan
- zaokruženo više ponuđenih odgovora
- nečitko i nejasno napisan
- rješenje napisano grafitnom olovkom

Grafike i geometrijske slike možete crtati grafitnom olovkom.

Ukoliko pogriješite, prekrižite i rješavajte ponovo. Ako ste zadatak riješili na više načina, nedvosmisleno označite koje rješenje ocjenjivač boduje.

Kad završite sa rješavanjem, provjerite svoje odgovore.

Želimo vam puno uspjeha!



\* M 7 6 8 6 1 \*



**PRAZNA STRANA**

## FORMULE

- $i^2 = -1$ ,  $z = a + bi$ ,  $\bar{z} = a - bi$ ,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $a, b \in R$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ ,  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- Vietova pravila:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- Tjeme parabole:  $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ,  $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$
- Skalarna projekcija vektora na osu  $pr_x \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha$
- Skalarni proizvod vektora preko koordinata  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
- Vektorski proizvod vektora preko koordinata  
 $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ ,
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \beta \sin \alpha$
- $tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg \alpha \pm tg \beta}{1 \mp tg \alpha \cdot tg \beta}$
- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ,  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ,  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- Sinusna teorema:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$
- Kosinusna teorema:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
- Trougao:  $P = \frac{ah_a}{2}$ ,  $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ ,  
 $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ,  $s = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $P = r \cdot s$ ,  $P = \frac{abc}{4R}$
- Paralelogram:  $P = a \cdot h_a$ , Romb:  $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$  Trapez:  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$
- Prizma:  $P = 2B + M$   $V = B \cdot H$
- Piramida:  $P = B + M$   $V = \frac{1}{3} B \cdot H$
- Zarubljena piramida:  $P = B_1 + B_2 + M$ ,  $V = \frac{H}{3} (B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$

$R$  – oznaka za poluprečnik

- Valjak:  $P = 2B + M = 2R\pi(R + H)$ ,  $V = B \cdot H = r^2\pi H$
- Kupa:  $P = B + M = R\pi(R + l)$ ,  $V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3}R^2\pi H$
- Zarubljena kupa:  $P = \pi(R_1^2 + R_2^2 + (R_1 + R_2)l)$ ,  $V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$
- Sfera:  $P = 4R^2\pi$       Lopta:  $V = \frac{4}{3}R^3\pi$
- Rastojanje između dvije tačke:  $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Površina trougla:  $P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
- Ugao između dvije prave:  $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$
- Rastojanje između tačke i prave:  $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$
- Kružna linija:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$   
Uslov dodira kružne linije sa centrom u koordinatnom početku i prave  
 $R^2(1 + k^2) = n^2$
- Elipsa:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $F_{\frac{1}{2}}(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$   
Uslov dodira prave i elipse:  $a^2k^2 + b^2 = n^2$
- Hiperbola:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $F_{\frac{1}{2}}(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ , asimptote hiperbole  $y = \pm \frac{b}{a}x$   
Uslov dodira prave i hiperbole:  $a^2k^2 - b^2 = n^2$
- Parabola:  $y^2 = 2px$ ,  $F(\frac{p}{2}, 0)$   
Uslov dodira prave i parabole:  $p = 2kn$
- Aritmetički niz:  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ,  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$
- Geometrijski niz:  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ ,  $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ ,  $q \neq 1$

U sljedećim zadacima zaokružite slovo ispred tačnog odgovora.

**1.** Koje od navedenih tvrđenja je **tačno**?

- A. Ako je  $a$  iracionalan broj, tada je  $\frac{1}{a}$  iracionalan broj.
- B. Suma dva iracionalna broja je iracionalan broj.
- C. Proizvod dva iracionalna broja je iracionalan broj.
- D. Ako je  $a$  racionalan broj ( $a \geq 0$ ), tada je  $\sqrt{a}$  iracionalan broj.

*3 boda*

**2.** Izraz  $\frac{8a^4 - 16a^6}{2a^3}$  je ekvivalentan sa:

- A.  $2a(1 - 2a^2)$
- B.  $2a(1 - 4a^4)$
- C.  $4a(1 - 2a^2)$
- D.  $8a^3(1 - a)$

*3 boda*

**3.** Cijena proizvoda je prvo snižena 15%, a zatim je nova cijena snižena još za 20% tako da je proizvod koštao 204 €. Kolika je bila prvobitna cijena?

- A. 275,4 €
- B. 280 €
- C. 300 €
- D. 313,8 €

*3 boda*

4. Vrijednost izraza  $\left(\frac{i^{100}}{\sqrt{2}} + \frac{i^{99}}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$  je:

- A.  $i$
- B.  $-i$
- C.  $-1$
- D.  $1$

3 boda

5. Koji od datih sistema jednačina ima beskonačno mnogo rješenja?

- A.  $3x+4y-5=0 \wedge 6x+8y-9=0$
- B.  $3x+4y-5=0 \wedge 9x+12y-15=0$
- C.  $3x+4y-5=0 \wedge 6x+8y-15=0$
- D.  $3x+4y-5=0 \wedge 9x+12y-10=0$

3 boda

6. Koju vrijednost ima parametar  $m$  u jednačini  $x^2 - 9x + m = 0$ , ako je poznato da za rješenja jednačine  $\alpha$  i  $\beta$  važi jednakost  $\alpha - \beta = 5$ ?

- A. 11
- B. 14
- C. 18
- D. 21

3 boda

**7.** Koeficijent pravca prave  $p$  koja prolazi kroz tačku  $(4, -3)$  je  $\frac{1}{3}$ .

Koja od datih tačaka pripada pravoj  $p$  ?

- A.  $(-5, 1)$
- B.  $(-3, 1)$
- C.  $(2, 6)$
- D.  $(1, -4)$

*3 boda*

**8.** Na koliko načina se može napisati u programu za koncert, redosled izvođenja za 5 muzičara?

- A. 25
- B. 50
- C. 100
- D. 120

*3 boda*



Zadatke koji slijede rješavajte postupno.

9. Uprostite izraz  $(a-1)^2 + 2(a-1)(b+1) + (b+1)^2$ , a zatim izračunajte njegovu vrijednost za  $a = 9,9$  i  $b = 0,1$ .

Rješenje:

2 boda

**10.** Riješite jednačinu  $\frac{2}{z+2} + 1 = \frac{z^3}{z^3+8} - \frac{1-2z}{z^2-2z+4}$ .

**Rješenje:**

*3 boda*

**11.** Riješite nejednačinu  $\frac{-5}{x^2 - 3x - 28} > 0$ .

Rješenje:

*3 boda*

- 12.** Eksperimentom je praćena brzina razmnožavanja bakterija. Zabilježen je eksponencijalan rast. Dio rezultata je dat u tabeli ispod.

$x$ – vrijeme u minutama	1	3	5
$y$ – broj bakterija	3	27	243

- a) Zapišite funkciju kojom je određena brzina razmnožavanja.

*1 bod*

- b) Izračunajte na osnovu podataka koliko će biti bakterija nakon 8 minuta.

*1 bod*

**Rješenje:**

**13.** Riješite jednačinu  $1 + \log_2 x = \frac{6}{\log_2 x}$ .

**Rješenje:**

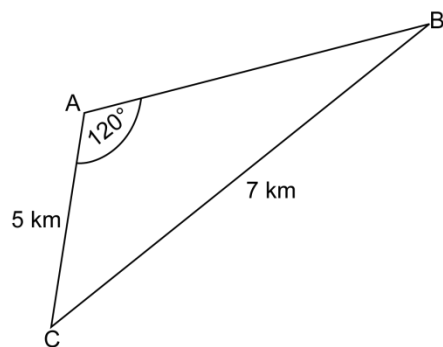
*4 boda*

**14.** Uprostite izraz  $\sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}}$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Rješenje:**

*3 boda*

- 15.** Iz mjesta A u mjesto B se može stići na dva načina, direktno ili dužim putem tako da se prođe kroz mjesto C, kao što je ilustrovano ispod. Koristeći podatke sa skice izračunajte za koliko kilometara je duže putovanje ako se prolazi kroz mjesto C.



**Rješenje:**

*4 boda*

**16.**

Neka su tačke  $A(-3,3)$ ,  $B(-2,-4)$  i  $C(2,0)$  koordinate tjemena trougla  $ABC$ .

a) U datom koordinatnom sistemu nacrtajte trougao  $ABC$ .

1 bod

b) Ako su tačke  $M$  i  $N$ , središta duži  $BC$  i  $AC$  redom, **izračunajte** njihove koordinate.

1 bod

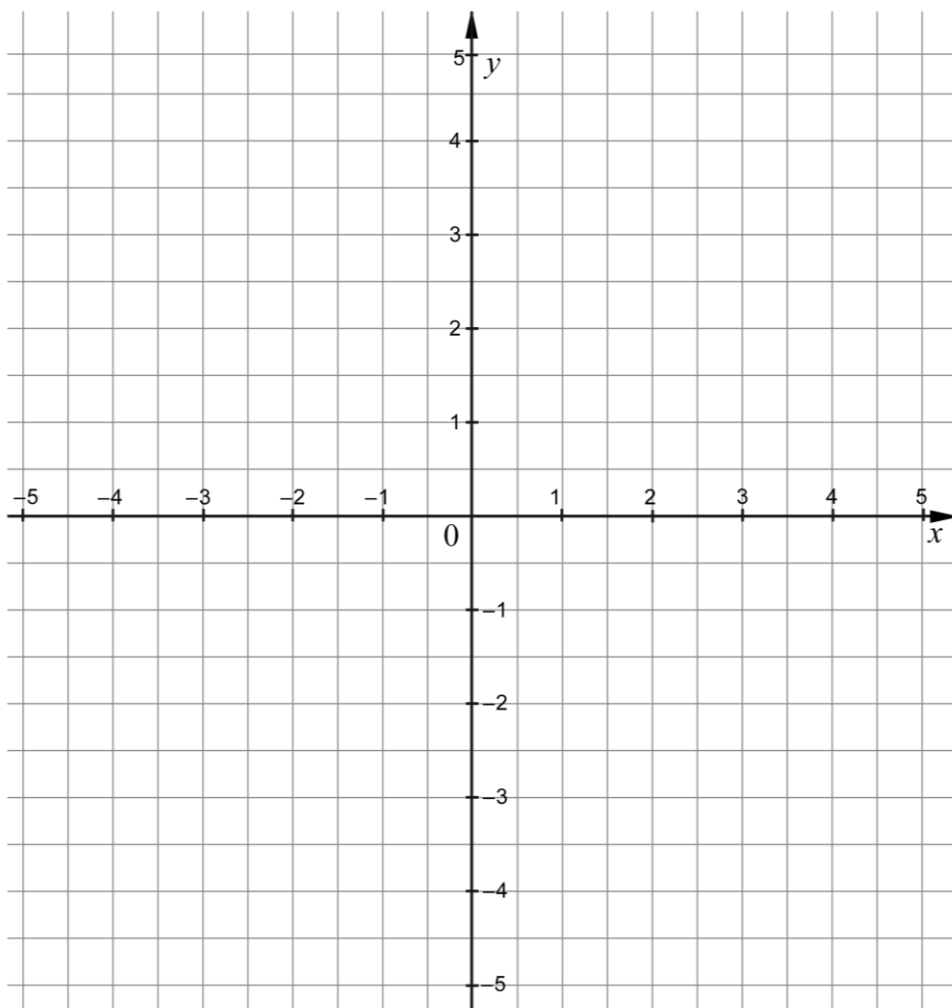
c) Zašto je  $MN \parallel AB$ ?

1 bod

d) Odredite dužinu stranice  $AB$ .

1 bod

Rješenje:







- 17.** Izračunajte površinu piramide koja ima u osnovi kvadrat, a bočne strane su jednakostranični trouglovi. Poluprečnik opisanog kruga oko kvadrata  $\sqrt{2}$ .

**Napomena:** Uz rješenje je **neophodno** da nacrtate i skicu koja odgovara tekstu zadatka.

Rješenje:

3 boda

- 18.** Ispred stovarišta treba ograditi prostor pravougaonog oblika površine  $150m^2$  za izlaganje opreme. Planirana je betonska ograda sa jedne strane, a sa ostale tri žičana. Cijena gotove žičane ograde je 15 € za metar dužine, dok je 30 € potrebno za metar dužine gotove betonske ograde. Odredite dimenzije ograde tako da ukupna cijena materijala bude minimalna.

**Rješenje:**

*5 bodova*

- 19.** Date su funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$  i  $g(x) = \frac{1}{x-2}$ . Odredite domen i nule funkcije  $h(x) = f(x) + g(x)$ .

**Rješenje:**

*3 boda*

**20.** Dvije kockice su bačene. Kolika je vjerovatnoća da će dva dobijena broja kada se saberu dati prost broj?

**Rješenje:**

*3 boda*





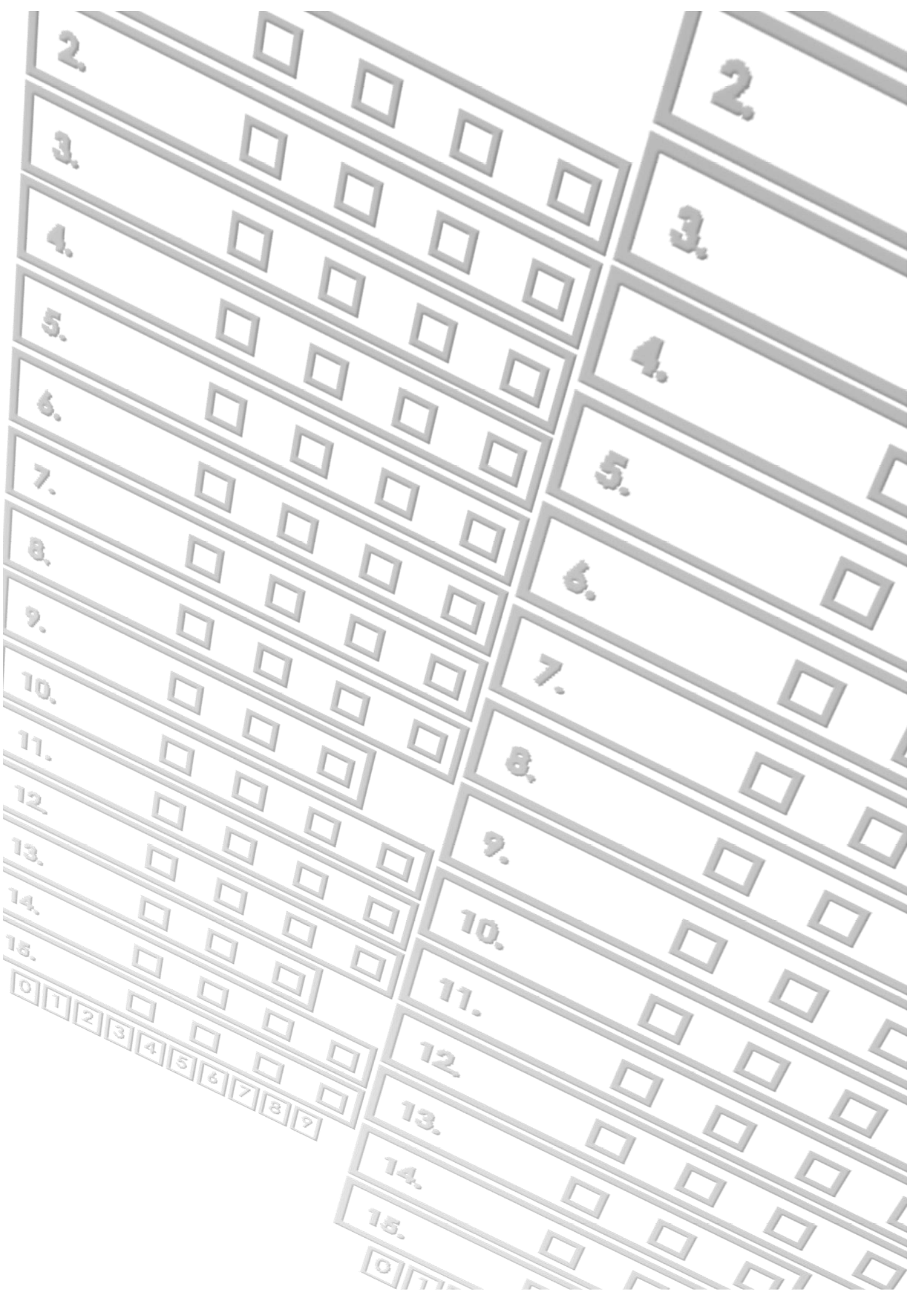












2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1