

ŠIFRA UČENIKA

M A T U R S K I I S P I T

JANUAR 2018.

MATEMATIKA

U P U T S T V O

VRIJEME RJEŠAVANJA TESTA JE 150 MINUTA

Pribor: grafitna olovka i gumica, hemijska olovka, geometrijski pribor.
Upotreba digitrona nije dozvoljena.

Pažljivo pročitajte uputstvo.

Ne okrećite stranice i ne rješavajte zadatke dok to ne dozvoli dežurni nastavnik.

Test sadrži 20 zadataka.

Tokom rada možete koristiti formule koje su date na stranama 4 i 5.

Uz test je dat i list za odgovore za zadatke višestrukog izbora. Potrebno je da na odgovarajuće mjesto pažljivo prepisete svoje odgovore za prvih 8 zadataka.

Očekuje se da je kod zadataka otvorenog tipa detaljno napisan postupak rješavanja, da je krajnji rezultat sveden (npr. izvršeno je skraćivanje razlomaka, sabiranje članova iste vrste) i da je napisana odgovarajuća jedinica mjere (kod zadataka iz stereometrije).

Zadatak će se vrednovati sa 0 bodova ako je:

- netačan
- zaokruženo više ponuđenih odgovora
- nečitko i nejasno napisan
- rješenje napisano grafitnom olovkom

Grafike i geometrijske slike možete crtati grafitnom olovkom.

Ukoliko pogriješite, prekrižite i rješavajte ponovo. Ako ste zadatak riješili na više načina, nedvosmisleno označite koje rješenje ocjenjivač boduje.

Kad završite sa rješavanjem, provjerite svoje odgovore.

Želimo vam puno uspjeha!



PRAZNA STRANA

FORMULE

- $i^2 = -1$, $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a, b \in R$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- Vietova pravila: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- Tjeme parabole: $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$
- Skalarna projekcija vektora na osu $pr_x \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha$
- Skalarni proizvod vektora preko koordinata $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
- Vektorski proizvod vektora preko koordinata
 $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$,
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \beta \sin \alpha$
- $tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg \alpha \pm tg \beta}{1 \mp tg \alpha \cdot tg \beta}$
- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- Sinusna teorema: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$
- Kosinusna teorema: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
- Trougao: $P = \frac{ah_a}{2}$, $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$,
 $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$, $P = r \cdot s$, $P = \frac{abc}{4R}$
- Paralelogram: $P = a \cdot h_a$, Romb: $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ Trapez: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$
- Prizma: $P = 2B + M$ $V = B \cdot H$
- Piramida: $P = B + M$ $V = \frac{1}{3} B \cdot H$
- Zarubljena piramida: $P = B_1 + B_2 + M$, $V = \frac{H}{3} (B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$

R – oznaka za poluprečnik

- Valjak: $P = 2B + M = 2R\pi(R + H)$, $V = B \cdot H = r^2\pi H$
- Kupa: $P = B + M = R\pi(R + l)$, $V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3}R^2\pi H$
- Zarubljena kupa: $P = \pi(R_1^2 + R_2^2 + (R_1 + R_2)l)$, $V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$
- Sfera: $P = 4R^2\pi$ Lopta: $V = \frac{4}{3}R^3\pi$
- Rastojanje između dvije tačke: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Površina trougla: $P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
- Ugao između dvije prave: $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$
- Rastojanje između tačke i prave: $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$
- Kružna linija: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
Uslov dodira kružne linije sa centrom u koordinatnom početku i prave
 $R^2(1 + k^2) = n^2$
- Elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $F_{\frac{1}{2}}(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
Uslov dodira prave i elipse: $a^2k^2 + b^2 = n^2$
- Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $F_{\frac{1}{2}}(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, asimptote hiperbole $y = \pm \frac{b}{a}x$
Uslov dodira prave i hiperbole: $a^2k^2 - b^2 = n^2$
- Parabola: $y^2 = 2px$, $F(\frac{p}{2}, 0)$
Uslov dodira prave i parabole: $p = 2kn$
- Aritmetički niz: $a_n = a_1 + (n - 1)d$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$
- Geometrijski niz: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, $q \neq 1$

U sljedećim zadacima zaokružite slovo ispred tačnog odgovora.

1. Vrijednost izraza $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ je:

- A. \sqrt{x}
- B. $\sqrt[3]{x}$
- C. $\sqrt[6]{x}$
- D. $\sqrt[8]{x}$

3 boda

2. Na pitanje "Da li dolazite u školu pješice?", 90% anketiranih učenika je između odgovora DA ili NE izabralo odgovor DA. Koliko je učenika izabralo odgovor NE, ako je 297 učenika odgovorilo potvrdno?

- A. 27
- B. 30
- C. 33
- D. 36

3 boda

3. Za koju vrijednost paramera m će ostatak pri dijeljenju polinoma $3x^3 - 7x^2 + mx - 3$ sa $3x - 1$ biti nula?

- A. 3
- B. 5
- C. 11
- D. 15

3 boda

4. Ako je i imaginarna jedinica tada je $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}$ jednako:

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. i

3 boda

5. Skup rješenja nejednačine $|x - 5| < 5$ je:

- A. $(0, 10)$
- B. $(-\infty, 0) \cup (10, +\infty)$
- C. $(-\infty, 5)$
- D. $(5, +\infty)$

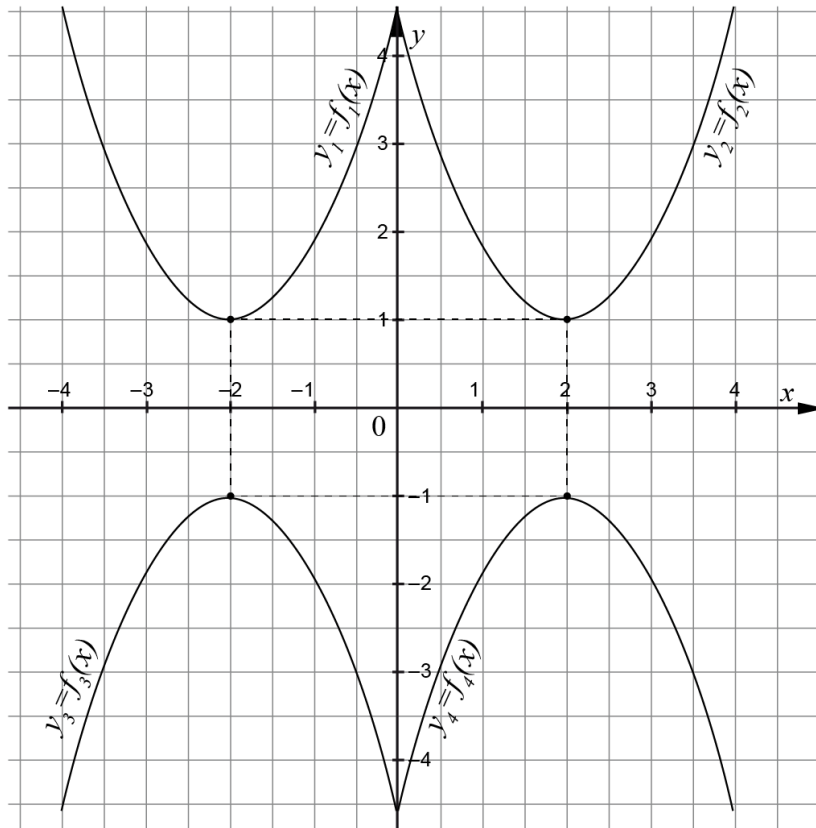
3 boda

6. Ako je $f(x) = 2^x + 1$ i $g(x) = 2^{x+1}$, koja od sljedećih rečenica je tačna?

- A. Funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju istu asimptotu.
- B. Funkcije $f(x)$ i $g(x)$ sijeku y -osu u istoj tački.
- C. Kada je x negativno, $g(x)$ je veće od $f(x)$.
- D. Kada je x pozitivno, $f(x)$ je veće od $g(x)$.

3 boda

7. Koji od prikazanih grafika odgovara funkciji $f(x) = x^2 + 4x + 5$?



- A. $y_1 = f_1(x)$
 B. $y_2 = f_2(x)$
 C. $y_3 = f_3(x)$
 D. $y_4 = f_4(x)$

3 boda

8. Koja od funkcija **nema** horizontalnu asimptotu?

- A. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
 B. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
 C. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$
 D. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 1}$

3 boda

Zadatke koji slijede rješavajte postupno.

9.

a) Izračunajte $\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

1 bod

b) Rastavite na činioce $a^{x+1} - a^x$.

1 bod

c) Skratite razlomak $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^3 - b^3}$.

1 bod

Rješenje:

10. Za koju vrijednost parametra k jednačina $x^2 - 6x + 5k - 1 = 0$ ima dvostruko rješenje?

Rješenje:

2 boda

11. Odredite realan broj x tako da razlika toga broja i njegovog kvadrata bude najveća.

Rješenje:

3 boda

12. Riješite jednačinu $x^{\log_2 x} = 16$.

Rješenje:

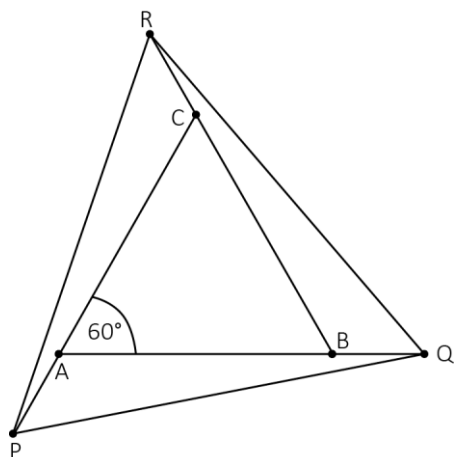
4 boda

13. Izračunajte $\operatorname{tg}15^\circ + \operatorname{ctg}15^\circ$.

Rješenje:

4 boda

- 14.** Na produžecima stranica jednakostraničnog trougla ABC date su tačke P, Q, R tako da je $AP = BQ = CR$ (kao na slici). Dokazati da je trougao PQR jednakostraničan.



Rješenje:

3 boda

15. Naći površinu paralelograma konstruisanog na vektorima:

$$\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}, \vec{b} = \vec{m} - 4\vec{n}, |\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = 3, \sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = 150^\circ.$$

Rješenje:

4 boda

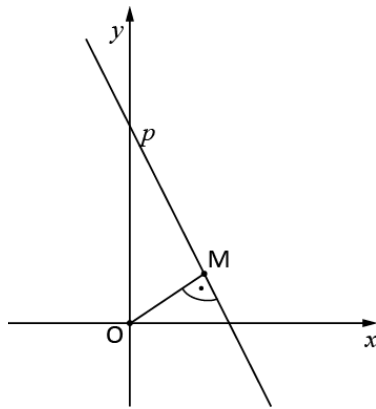
16.

Pravougaonik sa stranicama dužine a i b može biti omotač dva različita valjka.
Koliki je odnos njihovih zapremina?

Rješenje:

3 boda

- 17.** Dužina duži OM , koja sa pozitivnim dijelom x – ose zaklapa ugao od 30° , je 3. Odredite jednačinu prave p sa slike.



Rješenje:

3 boda

18. Napisati jednačinu hiperbole ako su njena tangenta i asimptote redom prave:

$$x + y + 1 = 0, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

Rješenje:

3 boda

19. Odredite znak funkcije $f(x) = \frac{x}{8 - 2x - x^2}$.

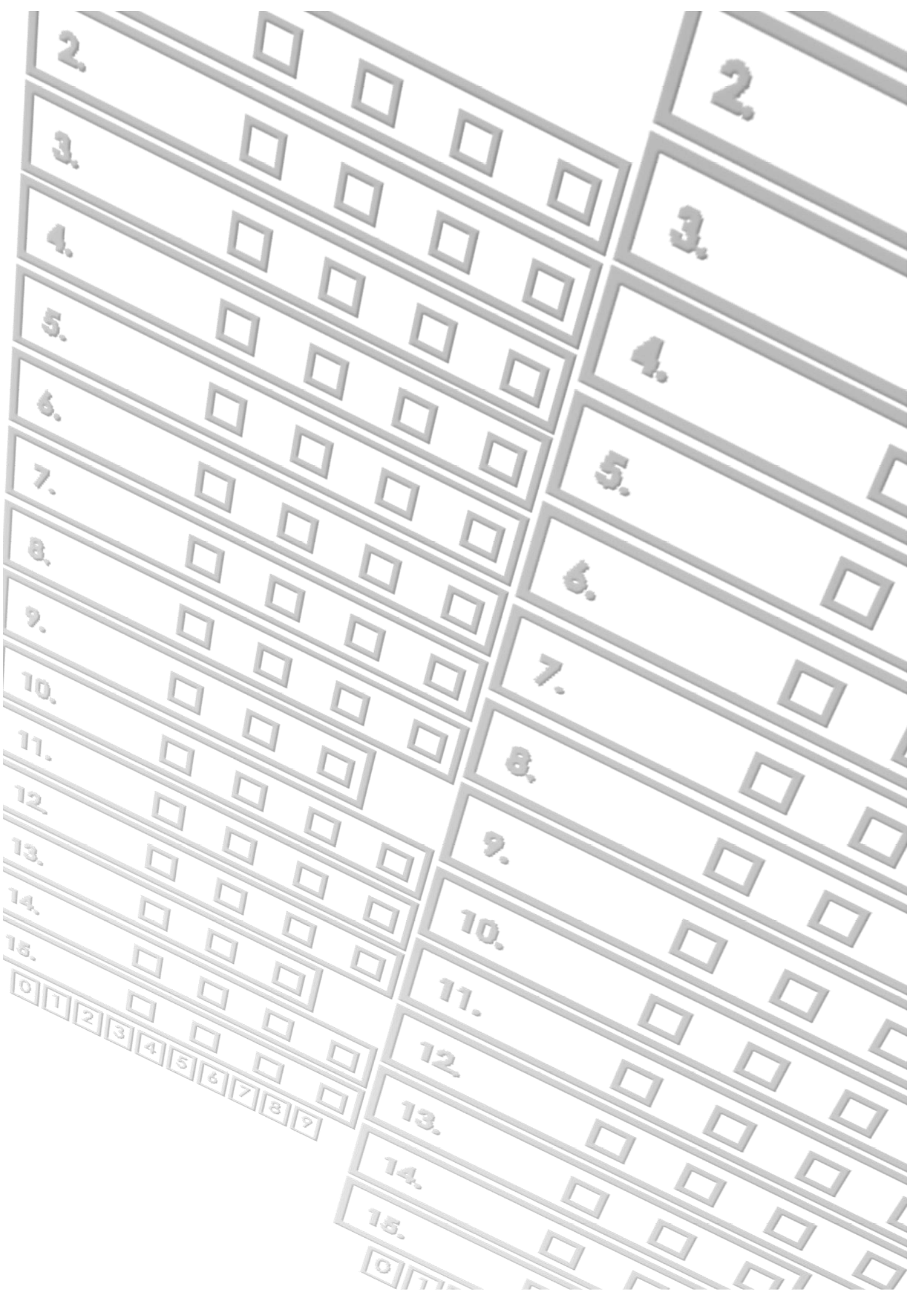
Rješenje:

4 boda

- 20.** Na koliko se načina 5 novih učenika može rasporediti u 4 odjeljenja, tako da svako odjeljenje dobije bar po jednog od njih?

Rješenje:

3 boda



2.



3.



4.



5.



6.



7.



8.



9.



10.



11.



12.



13.



14.



15.



0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10.

11.

12.

13.

14.

15.

0

1

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

0

1