ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2013.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

Vrijeme za izradu zadataka: 240 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 bodova (5 zadataka nosi maksimalno 100 bodova).

Pri izradi zadataka učenik može koristiti geometrijski pribor. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobilnih telefona i ostalih elektronskih sredstava.

ZADACI

1. Odrediti najmanji prirodan broj n za koji su ispunjena sljedeća tri uslova:

1) n je kvadrat nekog prirodnog broja,
2) n je djeljiv sa 2013 i
3) broj $n-1$ je djeljiv sa 2012.

2. Kružnice k_1 i k_2 se sijeku u tačkama A i B. Kroz proizvoljnu tačku M duži AB povučene su tetiva PQ kružnice k_1 i tetiva RS kružnice k_2. Dokazati da tačke P,Q,R i S pripadaju jednoj kružnici.

3. U unutrašnjosti kruga poluprečnika 4cm odabrano je 61 tačaka. Dokazati da među tih 61 tačaka postoje dvije tačke čija je udaljenost manja ili jednaka od $\sqrt{2}$ cm.

4. Naći sve funkcije $f:Z\to R$ (Z je skup cijelih brojeva, a R je skup realnih brojeva) takve da je $f(1)=1$ i da za svako $x\in Z$ i $y\in Z$ važi

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1.$$

5. Neka su x,y i z pozitivni brojevi za koje važi

$$x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6.$$

Dokazati da važi

$$x+y+z\le 3.$$

RJEŠENJA

1. Kako je $2013 = 3\times 11\times 61$ (3, 11 i 61 su prosti brojevi), iz uslova 1) i 2) slijedi da se traženi prirodan broj n može prikazati kao proizvod $n = 3^2 \times 11^2 \times 61^2 k^2 = 2013^2 k^2$, gdje je k prirodan broj. Nadalje, iz uslova 3) slijedi da broj $n-1 = 2013^2 k^2 - 1$ mora biti djeljiv sa 2012. To je, imajući u vidu da 2013 pri dijeljenju sa 2012 daje ostatak 1, ekvivalentno sa činjenicom da $k^2 - 1$ bude djeljivo sa 2012. Kako je $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ i $2012 = 2^2 \times 503$ (2 i 503 su prosti brojevi) to možemo razlikovati dva slučaja:

1. *slučaj*: $k+1$ je djeljivo sa 503. Tada za $k+1 = 503$ slijedi $k = 502.$ Za vrijednost $k = 502$ broj $k^2 - 1 = (k-1)(k+1) = 501\times 503$ nije djeljiv sa 2, a samim tim ni sa 2012. Za sljedeću moguću vrijednost $k+1 = 2\times 503$ imamo $k = 2\times 503 - 1$ za koju je broj

$$k^2 - 1 = (2\times 503 - 1)^2 - 1 = 2\times 503(2\times 503 - 2) = 4\times 503\times 502 = 2012\times 502$$

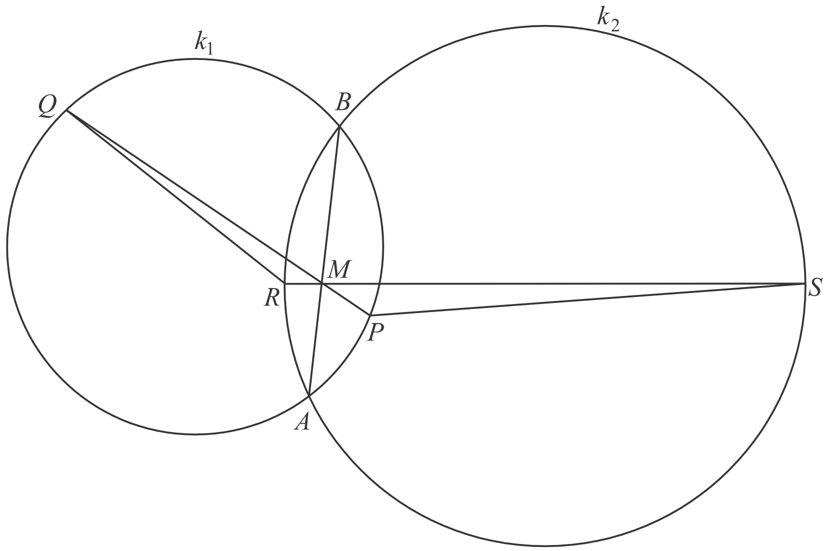
djeljiv sa 2012. Stoga je broj $n_1 = 2013^2 k^2 = 2013^2 (2\times 503 - 1)^2 = 2013^2 \times 1005^2$ najmanji prirodan broj u ovom (prvom) slučaju koji zadovoljava sva tri tražena uslova 1), 2) i 3).

2. *slučaj*: $k-1$ je djeljivo sa 503. Tada za $k-1 = 503$ imamo $k = 504,$ ali za tu vrijednost od k broj $k^2 - 1 = (k-1)(k+1) = 503\times 505$ nije djeljiv sa 2, a samim tim ni sa $2012 = 2^2 \times 503$. Za sljedeću moguću vrijednost za k imamo $k-1 = 2\times 503,$ tj. $k = 2\times 503 + 1 = 1007.$ Međutim, za vrijednost $k = 1007$ dobijamo

$$n_2 = 2013^2 k^2 = 2013^2 \times 1007^2 > 2013^2 \times 1005^2 = n_1..$$

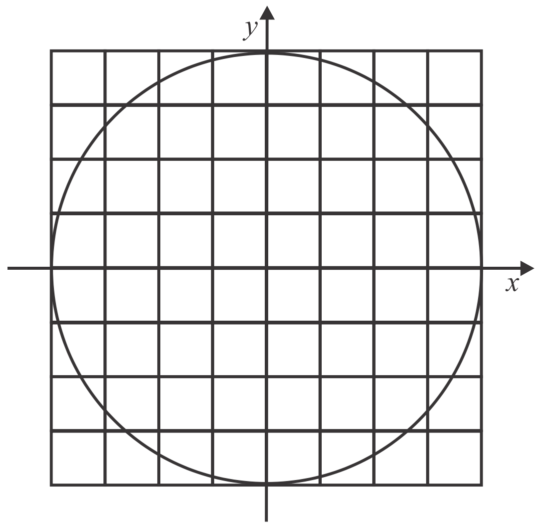
Dakle, $n_2 > n_1$, pa otuda zaključujemo da je broj $n_1 = 2013^2 \times 1005^2$ najmanji prirodan broj koji ispunjava sva tri uslova iz zadatka.

2. Uočimo da važi $MP\cdot MQ = MR\cdot MS = MB\cdot MA$ (potencija tačke M u odnosu na kružnice k_1 i k_2; vidi sliku 1), odakle slijedi $\frac{MP}{MS} = \frac{MR}{MQ}$. Na osnovu prethodne jednakosti zaključujemo da su trouglovi PMS i RMQ slični (imaju jednake uglove $\angle PMS = \angle RMQ$ i proporcionalne odgovarajuće stranice koje zaklapaju te uglove). Otuda slijedi da je $\angle QRS = \angle QPS$, pa otuda zaključujemo da tačke P, Q, R i S pripadaju jednoj kružnici, što se i tvrdilo u zadatku.



Slika 1.

3. Smjestimo dati krug u koordinantni sistem (xOy) tako da mu je središte koordinantni početak O (vidi sliku 2). Tada je dati krug očigledno upisan u kvadrat 8×8cm koji je podijeljen na 64 jedinična kvadrata stranice 1cm. Kako je $3^2+3^2>4^2$, a unutrašnja oblast kruga određena nejednakošću $x^2+y^2<4^2$, zaključujemo da se tačka $A_1(3,3)$ nalazi izvan datog kruga. Otuda slijedi da se "vršni jedinični" kvadrat iz prvog kvadranta posmatranog kvadrata 8×8cm nalazi izvan datog kruga (to je zapravo kvadrat čija su tjemena tačke $A_1(3,3)$, $A_2(4,3)$, $A_3(4,4)$ i $A_4(3,4)$). Na isti način, na osnovu simetrije (u odnosu na x-osu i y-osu) zaključujemo da se ostala tri "vršna jedinična" kvadrata iz ostala tri kvadranta posmatranog kvadrata $8x8$cm takođe nalaze u vanjskoj oblasti datog kruga. To znači da je unutrašnjost datog kruga pokrivena sa $64-4=60$ jediničnih kvadrata koji pripadaju kvadratu $8x8$cm. Stoga, na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da među 61 datih tačaka postoje barem dvije tačke koje leže unutar (ili na stranicama) jednog istog kvadrata stranice 1cm. Tada je udaljenost između te dvije tačke očigledno manja ili jednaka od dužine dijagonale tog kvadrata stranice 1cm koja iznosi $\sqrt{2}$ cm. Time je tvrđenje dokazano.



Slika 2

4. Uvrštavajući $x=1$ i $f(1)=1$ u datu jednačinu, dobijamo
$$f(y+1)-f(y)=y+2. \qquad (1)$$
Uvrštavajući $y=0$ i dati uslov $f(1)=1$ u jednakost (1), dobijamo $f(0)=-1$.
Za proizvoljan prirodan broj $n\geq 1$, koristeći jednakost (1) i $f(0)=-1$ imamo
$$f(n)+1=f(n)-f(0)=\sum_{y=0}^{n-1}(f(y+1)-f(y))=\sum_{y=0}^{n-1}(y+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1,$$
odakle slijedi
$$f(n)=\frac{n^2+3n+2}{2}-2=\frac{n^2+3n-2}{2} \quad \text{za svaki priirodan broj } n. \qquad (2)$$
Uvrštavajući u datu jednakost $x=n$, $y=-n$ i $f(0)=-1$, pri čemu je n proizvoljan prirodan broj, dobijamo
$$f(n)+f(-n)=f(0)+n^2-1=-1+n^2-1=n^2-2,$$
odakle zajedno sa (2) slijedi
$$f(-n)=n^2-2-f(n)=n^2-2-\frac{n^2+3n-2}{2}=\frac{n^2-3n-2}{2}=\frac{(-n)^2+3(-n)-2}{2}. \qquad (3)$$
Konačno, iz (2) i (3) slijedi da za proizvoljan cijeli broj n važi
$$f(n)=\frac{n^2+3n-2}{2}. \qquad (4)$$
Neposrednim uvrštavanjem izraza (4) za $f(n)$, tj. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{2}$, $f(y)=\dfrac{y^2+3y-2}{2}$ i $f(x+y)=\dfrac{(x+y)^2+3(x+y)-2}{2}$ u datu jednakost provjeravamo da funkcija $f(n)$ data pomoću (4) zadovoljava uslov
$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$$

za svaki par cijelih brojeva x i y.

5. Na osnovu date jednakosti slijedi

$$x^2+y^2+z^2=6-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2),$$

što zamjenom u identitet

$$(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz+2zx,$$

neposredno daje

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2&=6-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+2xy+2yz+2zx\\&=9-(x^2y^2-2xy+1)-(y^2z^2-2yz+1)-(z^2x^2-2zx+1)\\&=9-(xy-1)^2-(yz-1)^2-(zx-1)^2\leq 9.\end{aligned}$$

Iz prethodne nejednakosti slijedi

$$x+y+z\leq 3,$$

što je i trebalo dokazati. Uočimo još da jednakost važi ako i samo ako je $xy=yz=zx=1,$ odnosno ako i samo ako je $x=y=z=1.$