ispitni centar
PRAVA
MJERA
ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2013.

ŠIFRA UČENIKA

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	1.	2.	3.	4.	5.
Maksimalan broj poena	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**

- Pribor za rad: **hemijska olovka i geometrijski pribor.**

SREĆNO!

<u>ZADACI</u>

1. Izračunati vrijednost izraza $a(a+2)+b(b-2)-2ab$, ako je $a-b=2013$.

2. Odrediti sve parove cijelih brojeva (m,n) koji zadovoljavaju jednačinu

$$mn+5n=m^2+10m+30.$$

3. Cifre a i b su različite i takve da važi $\overline{aa}\cdot\overline{ba}\cdot\overline{aba}=\overline{abaaba}$. Dešifrovati datu jednakost.

4. Dat je pravougli trougao ABC čije katete imaju dužine $a=4\,cm$, $b=3\,cm$. Odrediti rastojanje između centra upisanog i centra opisanog kruga trougla ABC.

5. U trouglu ABC težišna duž BM je dva puta manja od stranice AB i obrazuje sa njom ugao od 40°. Odrediti veličinu ugla $\angle ABC$.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Sređivanjem datog izraza i korišćenjem zadatog uslova dobijamo:

$$\begin{aligned} a(a+2)+b(b-2)-2ab &= a^2+2a+b^2-2b-2ab \\ &= (a-b)^2+2(a-b) \\ &= 2013^2+2\cdot 2013 \\ &= 2013\cdot 2015 \\ &= 4056195. \end{aligned}$$

2. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$n(m+5)=(m+5)^2-25+30,$$

a to je ekvivalentno sa

$$(m+5)(n-m-5)=5$$

$$\Updownarrow$$

$$(m+5=5\wedge n-m-5=1)\vee(m+5=1\wedge n-m-5=5)\vee(m+5=-5\wedge n-m-5=-1)\vee$$
$$\vee(m+5=-1\wedge n-m-5=-5)$$

$$\Updownarrow$$

$$(m=0\wedge n=6)\vee(m=-4\wedge n=6)\vee(m=-10\wedge n=-6)\vee(m=-6\wedge n=-6).$$

Dakle, cjelobrojna rješenja date jednačine su uređeni parovi

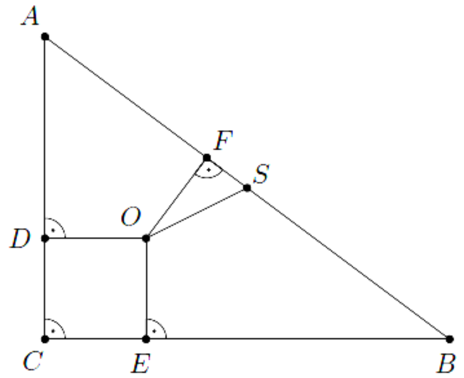
$$(0,6),\ (-4,6),\ (-10,-6)\ \text{i}\ (-6,-6).$$

3. Kako je $a\neq b\neq 0$, $\overline{aa}=11a$ i $\overline{abaaba}=1001\cdot\overline{aba}=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{aba}$, to nakon dijeljenja sa $11\cdot\overline{aba}$ dobijamo $a\cdot\overline{ba}=7\cdot 13$. Sada dobijamo dva slučaja:

(1) $a=7$ i $10b+a=13$, koji nema rješenja;

(2) $a=1$ i $10b+a=91$, koji daje rješenje $a=1$ i $b=9$ tj. $11\cdot 91\cdot 191=191191$.

4. Označimo sa S centar, a sa R poluprečnik opisanog kruga, sa O centar, a sa r poluprečnik upisanog kruga. Centar opisanog kruga je središte hipotenuze, pa je $|AS|=|SB|=R$. Neka su D, E i F redom podnožja normala iz tačke O na stranice AC, CB i BA.



Slika 1.

Tada je $|OD| = |OE| = |OF| = r$.

Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ABC dobijamo

$$c = |AB| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\,\text{cm}.$$

Uočimo da važi

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = P_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2},$$

pa je $r = \dfrac{ab}{a+b+c} = \dfrac{4 \cdot 3}{12} = 1\text{cm}$.

Važi

$$|AF| = |AD| = |AC| - |DC| = b - r = 2\,\text{cm}$$

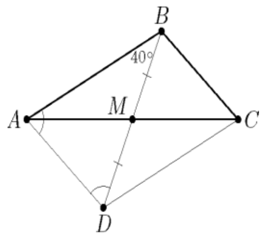
i

$$|FS| = |AS| - |AF| = R - |AF| = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}\ \text{cm},$$

pa traženu udaljenost dobijamo primjenom Pitagorine teoreme na trougao OFS:

$$|OS| = \sqrt{|OF|^2 + |FS|^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\text{cm}.$$

5. Na polupravoj BM odredimo tačku D tako da je BM = MD.



Slika 2.

Kako je AB = 2BM, to je AB = BD, odnosno trougao ABD je jednakokraki. Slijedi, uglovi BAD i BDA su jednaki i iznose po (180° – 40°):2 = 70°. Četvorougao ABCD je paralelogram, jer se njegove dijagonale AC i BD polove.

Slijedi, $\angle CBD = \angle ADB = 70^\circ$ i $\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = 110^\circ$.