



ispitni centar
**PRAVA
MJERA
ZNANJA**

DRŽAVNO TAKMIČENJE

2018.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

Podgorica, 20..... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **240 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	1.	2.	3.	4.
Maksimalan broj poena	25	25	25	25

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Neka su a,b,c,d pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c+d=4$. Dokazati da važi

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} + \frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} + \frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}} + \frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}} \leq 16.$$

2. Naći sve prirodne brojeve n takve da je
$$(2n-1)^k = (n^2+2)^m$$
 za neke m,k iz skupa prirodnih brojeva.

3. Oko okruglog stola je na n stolica raspoređeno n učenika, $n \geq 3$. Nastavnik je pripremio $k \geq 3$ različitih zadataka i želi svakom učeniku postaviti po jedan zadatak, pri čemu je dozvoljeno da različiti učenici dobiju isti zadatak (dakle, zadatak može biti postavljen više puta), ali susjedni učenici ne smiju dobiti isti zadatak. Na koliko načina nastavnik može podijeliti zadatke učenicima? Detaljno obrazložiti odgovor.

4. Neka je O centar opisanog kruga trougla ABC . Prava CO siječe visinu iz tjemena A u tački K i neka su P i M središta duži AK i AC redom. Ako opisana kružnica trougla BCM siječe AB u tački D , dokazati da je trougao PDO sličan trouglu ADM .

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Koristeći nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine dobijamo

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{b})^2 &= a^2 + 2a\sqrt{b} + b \\ &= a^2 + a \cdot 2 \cdot \sqrt{b \cdot 1} + b \\ &\leq a^2 + a(b+1) + b \\ &= (a+b)(a+1). \end{aligned} \quad (1)$$

Na osnovu nejednakosti između: (i) geometrijske i kvadratne sredine, (ii) kvadratne i aritmetičke sredine, slijedi

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} \stackrel{(i)}{\geq} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} + b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \stackrel{(ii)}{\geq} \frac{a+b}{2}. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$\frac{(a + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \leq \frac{(a+b)(a+1)}{\frac{a+b}{2}} = 2(a+1),$$

odnosno

$$\begin{aligned} &\frac{(a + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{(b + \sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{(c + \sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2 - cd + d^2}} + \frac{(d + \sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2 - da + a^2}} \\ &\leq 2(a+1) + 2(b+1) + 2(c+1) + 2(d+1) \\ &= 16. \end{aligned}$$

2. Lako se provjerava da ni za jedan od brojeva iz skupa {1,2,3,4} ne važi data jednakost.

Ako je $n=5$, onda je osnova na lijevoj strani jednaka $9=3^2$, a na desnoj $27=3^3$, pa je $n=5$ rješenje.

Neka je $n \geq 6$ takav da je za neke prirodne brojeve m i k

$$(2n-1)^k = (n^2 + 2)^m.$$

Tada važi: prost broj p je djelilac broja $n^2 + 2$ ako i samo ako p dijeli $2n-1$.

Neka je prost broj p zajednički djelilac za $n^2 + 2$ i $2n-1$. Tada je

$$n^2 + 2 = p \cdot r \quad i \quad 2n-1 = p \cdot q$$

za neke r i q iz skupa prirodnih brojeva. Slijedi

$$(2n)^2 + 8 = 4pr,$$

odnosno $(pq+1)^2 + 8 = 4pr$, odnosno

$$p \cdot (4r - pq^2 - 2q) = 9,$$

pa p dijeli 9. Kako je p prost broj dobijamo da je $p=3$.

Dakle, jedini prosti faktori brojeva $n^2 + 2$ i $2n-1$ jednak je 3, pa je

$$n^2 + 2 = 3^a \quad i \quad 2n-1 = 3^b$$

za neke brojeve a i b , pri čemu je $a > b \geq 3$. Iz

$$(2n)^2 + 8 = 4 \cdot 3^a \text{ i } 2n - 1 = 3^b$$

dobijamo $3^b \cdot 3^b + 2 \cdot 3^b + 9 = 4 \cdot 3^a$, pa 3^b dijeli 9, a to nije moguće za $b \geq 3$. Dakle, ne postoji prirodan broj $n \geq 6$ koji ispunjava uslov zadatka.

- 3.** Neka je $A_1A_2\dots A_n$ raspored učenika oko okruglog stola u smjeru kazaljke na satu i označimo sa $f(n, k)$ broj pridruživanja zadataka. Pretpostavimo da umjesto po krugu, imamo raspored $A_1A_2\dots A_n$ na pravoj. U tom slučaju učenici A_1 i A_n ne bi bili susjedni, pa je broj načina da se učenicima pridruže zadaci jednak $k(k-1)^{n-1}$. Za raspored na pravoj, sva pridruživanja možemo podijeliti na ona kod kojih su A_1 i A_n dobili različite zadatke i ona kod kojih su A_1 i A_n dobili isti zadatak. Broj prvih pridruživanja jednak je $f(n, k)$, a broj drugih je jednak $f(n-1, k)$, pa važi

$$k(k-1)^{n-1} = f(n, k) + f(n-1, k).$$

Dakle,

$$f(n, k) = k(k-1)^{n-1} - f(n-1, k)$$

i očigledno je $f(3, k) = k(k-1)(k-2)$, pa dobijamo

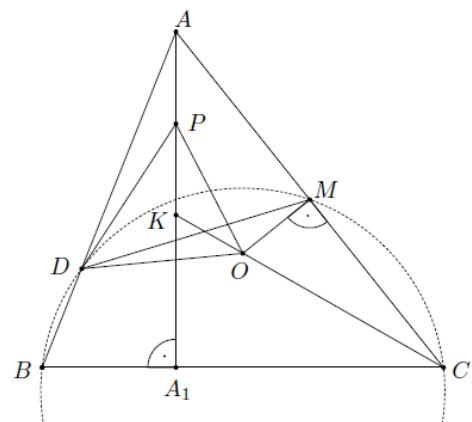
$$f(n, k)$$

$$\begin{aligned} &= k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + k(k-1)^{n-3} - \dots + (-1)^{n-4} k(k-1)^3 + (-1)^{n-3} k(k-1)(k-2) \\ &= k(k-1)^{n-1} \left(1 + \left(\frac{-1}{k-1} \right)^1 + \left(\frac{-1}{k-1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{-1}{k-1} \right)^{n-4} \right) + (-1)^{n-3} k(k-1)(k-2) \\ &= k(k-1)^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{-1}{k-1} \right)^{n-3}}{1 - \left(\frac{-1}{k-1} \right)} + (-1)^{n-3} k(k-1)(k-2) \\ &= (k-1)^n + (-1)^{n-4} (k-1)^3 + (-1)^{n-3} k(k-1)(k-2) \\ &= (k-1)^n + (-1)^n (k-1). \end{aligned}$$

- 4.** Neka je A_1 podnožje visine iz tjemena A (slika 1).

Četvorougao $BCMD$ je tetivan, pa je $\angle DBC + \angle DMC = 180^\circ$ i važi $\angle DMC + \angle DMA = 180^\circ$, pa slijedi $\angle DBC = \angle DMA$. Kako je $\angle OMC = 90^\circ$, to dobijamo $\angle DMO = 90^\circ - \angle DMA = 90^\circ - \angle DBC$, a iz trougla ABA_1 je

$$\angle A_1AB = 90^\circ - \angle ABA_1,$$



Slika 1.

odnosno

$$\angle DAP = 90^\circ - \angle DBC,$$

pa je $\angle DAP = \angle DMO$.

Ako bi dokazali da je $\frac{AD}{MD} = \frac{AP}{OM}$ dobićemo da je trougao DAP sličan trouglu DOM (na osnovu prvog stava sličnosti trouglova), pa će iz $\frac{DP}{DO} = \frac{AD}{DM}$ i jednakosti $\angle ODP = \angle MDA$ slijediti tražena sličnost.

Trouglovi AMD i ABC su slični, jer je ugao kod tjemena A zajednički i važi $\angle ABC = \angle DMA$ (drugi stav sličnosti trouglova), pa je $\frac{AD}{MD} = \frac{AC}{BC}$. Dokažimo da je $\frac{AP}{MO} = \frac{AC}{BC}$.

Primjenom sinusne teoreme na trougao AKC dobijamo

$$\frac{AC}{\sin \angle AKC} = \frac{AK}{\sin \angle KCA}.$$

Kako je OCA jednakokraki trougao, to važi

$$\angle KCA = \angle OCA = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2},$$

a sa druge strane O je centar opisanog kruga trougla ABC , što povlači $\angle AOC = 2\angle ABC$, pa dobijamo

$$\angle KCA = 90^\circ - \angle ABC.$$

Slično, BOC je jednakokraki trougao i $\angle BOC = 2\angle BAC$, pa je $\angle BCO = 90^\circ - \angle BAC$, a kako je

$$\angle AKC = 180^\circ - \angle A_KC = 180^\circ - (90^\circ - \angle BCO),$$

to dobijamo

$$\angle AKC = 180^\circ - \angle BAC.$$

Slijedi,

$$\frac{AC}{\sin \angle BAC} = \frac{AK}{\sin(90^\circ - \angle ABC)}.$$

Primjenjujući sinusnu teoremu na trougao OMC dobijamo

$$\frac{OC}{\sin 90^\circ} = \frac{OM}{\sin(90^\circ - \angle ABC)},$$

pa je $\frac{AK}{OM} = \frac{AC}{OC \cdot \sin \angle BAC}$, a kako je $AK = 2AP$, slijedi

$\frac{AP}{OM} = \frac{AC}{2OC \cdot \sin \angle BAC}$. Najzad, primjenom sinusne teoreme na trougao ABC ,

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2OC,$$

jer je OC poluprečnik opisanog kruga, pa je

$$\frac{AP}{OM} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{MD},$$

odnosno slijedi tražena sličnost.