ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2015.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

Vrijeme za izradu zadataka: 240 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 bodova (5 zadataka nosi maksimalno 100 bodova).

Pri izradi zadataka učenik može koristiti geometrijski pribor. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobilnih telefona i ostalih elektronskih sredstava.

ZADACI

1. Neka su a, b i c realni brojevi i $f(x)=ax^2+bx+c$ kvadratna funkcija tako da važi

$$|f(x)|\leq 1 \quad \text{za svaki realan broj } x \text{ za koji je } 0\leq x\leq 1.$$

Dokazati da važi $|b|\leq 8$.

2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje važi

$$a+b+c=\sqrt{abc}\,.$$

Dokazati da važi

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 27\,.$$

3. Neka su a, b, c, d i m cijeli brojevi takvi da je zbir am^3+bm^2+cm+d djeljiv sa 5, pri čemu d nije djeljivo sa 5. Dokazati da postoji cijeli broj n takav da je zbir

$$dn^3+cn^2+bn+a$$

djeljiv sa 5.

4. U kvadratnoj tabli 5×5 upisani su svi prirodni brojevi od 1 do 25, tj. u svakom polju te table upisan je tačno jedan od tih 25 brojeva. Zatim je iz svakog od 5 redova te table izabran drugi po veličini broj u tom redu. Ako je S zbir tako 5 odabranih brojeva, dokazati da važi

$$S\geq 60\,.$$

5. Tačke E i F nalaze se na stranici BC konveksnog četvorougla $ABCD$, pri čemu je tačka E bliža tački B nego tačka F. Poznato je da važi $\angle BAE=\angle CDF$ i $\angle EAF=\angle FDE$. Dokazati da važi

$$\angle FAC=\angle EDB\,.$$

RJEŠENJA

1. Uočimo da je

(1) $$f(0)=c, \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c \quad \text{i} \quad f(1)=a+b+c.$$

Kako je na osnovu uslova zadatka $|f(0)|\le 1$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le 1$ i $|f(1)|\le 1$, otuda i na osnovu (1) slijedi

(2) $$|c|\le 1, \quad \left|\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right|\le 1 \quad \text{i} \quad |a+b+c|\le 1.$$

Kako je

(2) $$b=4\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right)-(a+b+c)-3c,$$

iz (2) i (3), na osnovu nejednakosti trougla (za apsolutnu vrijednost) dobijamo

$$|b|\le 4\left|\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right|+|a+b+c|+3|c|\le 4+1+3=8,$$

odnosno $|b|\le 8$, što se i tvrdilo u zadatku.

2. Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, iz datog uslova dobijamo

$$\sqrt{abc}=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc},$$

odakle neposredno slijedi $\sqrt[6]{abc}\ge 3$, odnosno

(1) $$abc\ge 3^6.$$

Opet na osnovu nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja i koristeći nejednakost (1), slijedi

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}}=3\sqrt[3]{abc}\ge 3\sqrt[3]{3^6}=27,$$

odnosno

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ge 27,$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost u prethodnoj nejednakosti važi ako i samo ako je $a=b=c=9$.

3. Kako je po pretpostavci am^3+bm^2+cm+d djeljivo sa 5, a d nije djeljivo sa 5, otuda slijedi da cijeli broj m nije djeljiv sa 5. Nadalje, za svaki cijeli broj m koji nije djeljiv sa 5, možemo odabrati cijeli broj n tako da mn pri dijeljenju sa 5 daje ostatak 1 (ako je $m\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,5)$, tada n biramo tako da bude $n\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,5)$, respektivno; ako je $m\equiv\pm2(\mathrm{mod}\,5)$, tada n biramo tako da bude $n\equiv\mp2(\mathrm{mod}\,5)$ respektivno). Dakle, u svakom slučaju za tako izabrani cijeli broj n važi

(1) $$mn\equiv1(\mathrm{mod}\,5).$$

Ako za tako odabrani cijleli broj n stavimo

$$A=am^3+bm^2+cm+d \quad \text{i} \quad B=dn^3+cn^2+bn+a,$$

tada je

$$An^3-B=a(m^3n^3-1)+bn(m^2n^2-1)+cn^2(mn-1)=$$
$$(mn-1)\big(a(m^2n^2+mn+1)+bn(mn+1)+cn^2\big).$$

Na osnovu gornje jednakosti i kongruencije (1) slijedi da je cijeli broj An^3-B djeljiv sa 5, a kako je po uslovu zadatka A djeljivo sa 5, otuda slijedi da je i cijeli broj B djeljiv sa 5, što se i tvrdilo u zadatku.

4. Neka su a_1,a_2,a_3,a_4 i a_5 redom odabrani brojevi iz redova date table. Ne smanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5$. Otuda i na osnovu načina izbora brojeva a_1,a_2,a_3,a_4 i a_5 zaključujemo da od broja a_1 može eventualno biti veći najviše po jedan broj iz svakog od 5 redova table, a takvih brojeva može najviše biti 5. Stoga mora biti $a_1\geq25-5=20$. Slično zaključujemo da od broja a_2 mogu eventualno biti veći samo neki od 5 brojeva iz prvog reda, kao i najviše po jedan broj iz ostala 4 reda table, pa svih takvih brojeva najviše može biti $5+4=9$. Dakle, mora biti $a_2\geq25-9=16$. Na isti način slijedi da od broja a_3 mogu eventualno biti veći samo neki od 10 brojeva iz prva dva reda table, kao i najviše po jedan broj iz ostala 3 reda table, pa svih takvih brojeva najviše može biti $10+3=13$. Dakle, mora biti $a_3\geq25-13=12$. Nadalje, od broja a_4 mogu eventualno biti veći samo neki od 15 brojeva iz prva tri reda table, kao i najviše po jedan broj iz ostala 2 reda table, pa svih takvih brojeva najviše može biti $15+2=17$. Dakle, mora biti $a_4\geq25-17=8$. Konačno, od broja a_5 mogu eventualno biti veći samo neki od 20 brojeva iz prva četiri reda table, dok je tačno jedan broj iz petog reda table veći od a_5, pa svih brojeva u tabli koji su veći od a_5 najviše može biti $20+1=21$. Otuda slijedi da mora biti $a_5 \geq 25-21=4$. Iz prethodno pokazanog dobijamo

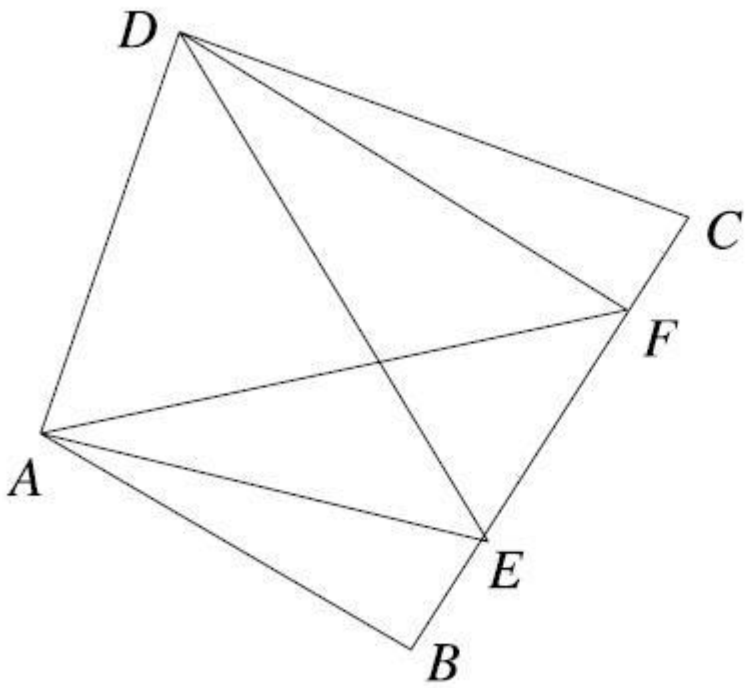
$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 20+16+12+8+4=60,$$

što se i tvrdilo u zadatku.

Uočimo da se jednakost $S=60$ npr. dostiže za kvadratnu tablu 5×5 datu na donjoj slici.

25	**20**	19	18	17
24	**16**	15	14	13
23	**12**	11	10	9
22	**8**	7	6	5
21	**4**	3	2	1

5. Kako je po uslovu zadatka $\angle EAF = \angle FDE$, zaključujemo da je četvorougao $AEFD$ tetivni (slika).



Slika.

Otuda slijedi

(1) $$\angle AEF + \angle FDA = 180^\circ.$$

Nadalje očigledno važi

(2) $$\angle ADC = \angle FDA + \angle CDF,$$

a iz trougla ABE slijedi

(3) $$\angle ABC = \angle AEF - \angle BAE.$$

Sabirajući (2) i (3) i koristeći (1) i uslov zadatka po kome je $\angle BAE = \angle CDF$, dobijamo

$$\angle ADC + \angle ABC = \angle FDA + \angle CDF + \angle AEF - \angle BAE = 180^\circ.$$

Dakle, važi $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$, pa je stoga četvorougao $ABCD$ tetivni, odakle slijedi

(4) $$\angle BAC = \angle BDC.$$

Iz (4) slijedi

$$\angle FAC = \angle BAC - \angle BAF = \angle BDC - \angle EDC = \angle EDB,$$

odnosno $\angle FAC = \angle EDB$, što je i trebalo dokazati.