ispitni centar
PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2014.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

Vrijeme za izradu zadataka: 240 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 bodova (5 zadataka nosi maksimalno 100 bodova).

Pri izradi zadataka učenik može koristiti geometrijski pribor. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobilnih telefona i ostalih elektronskih sredstava.

ZADACI

1. Neka je n prirodan broj veći od 1 i neka je p prost broj takav da je broj $p-1$ djeljiv sa n i broj n^3-1 djeljiv sa p. Dokazati da je $p=n^2+n+1$.

2. Na stranici AC trougla ABC odabrana je tačka D tako da važi $2AD=DC$. Neka je tačka E podnožje normale spuštene iz tačke D na stranicu BC, i neka je tačka F presjek pravih BD i AE. Ako je poznato da je trougao BEF jednakostraničan, dokazati da je $\angle ADB=90^\circ$.

3. Neka su x, y, z i t pozitivni brojevi za koje važi

$$x+y+z+t=1.$$

Dokazati da važi

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)\geq 81.$$

4. Neka su a i b cijeli brojevi tako da je $a\neq 0$ i $f(x)=ax^2+bx+2$ kvadratni trinom takav da važi

$$f(x)\geq\sqrt{2}(x^2+1) \text{ za svaki realan broj } x.$$

Dokazati da važi

$$f(x)>\sqrt{2}(x^2+1) \text{ za svaki realan broj } x.$$

5. Prirodni brojevi od 1 do $2n$ zapisani su u proizvoljnom poretku, a zatim je ispod svakog od njih napisan njegov redni broj u tom nizu. Svaki broj je potom sabran sa svojim rednim brojem. Dokazati da među tako dobijenim brojevima postoje dva broja čija je razlika djeljiva sa $2n$.

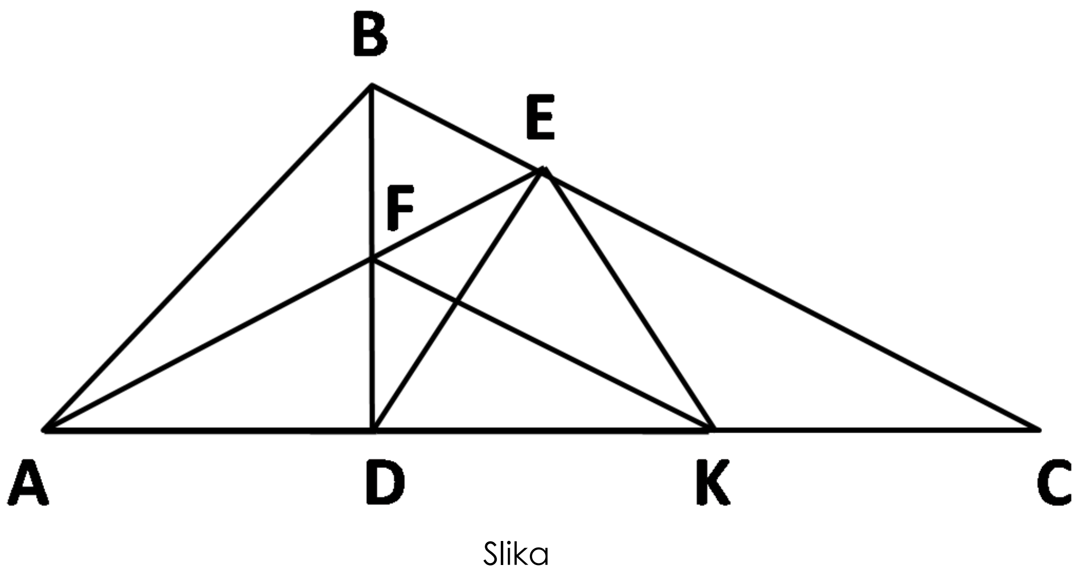
RJEŠENJA

1. Iz uslova $n \mid p-1$ slijedi da mora biti $p>n$. Dalje iz uslova $p \mid n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ i prethodne činjenice da je p prost broj veći od $n-1$, slijedi da $p \mid n^2+n+1$. Iz datog uslova $n \mid p-1$ slijedi da je $p=kn+1$ za neki prirodan broj k. Dakle, mora biti $kn+1 \mid n^2+n+1$, odakle slijedi $kn+1 \mid k(n^2+n+1)=kn^2+kn+k$. Otuda i iz činjenice da $kn+1 \mid n(kn+1)=kn^2+n$, dobijamo da važi

$$kn+1 \mid (kn^2+kn+k)-(kn^2+n)=(k-1)n+k.$$

Otuda slijedi $kn+1 \mid (k-1)n+k-(kn+1)=k-n-1$, pa stoga mora biti $k-n-1=0$ ili $kn+1 \leq |k-n-1|$. Međutim, ako je $kn+1 \leq |k-n-1|$, tada otuda i iz činjenice da za svako $k \geq 1$ i $n \geq 2$ važi $|k-n-1|<k+n$ dobijamo $kn+1<k+n$, odnosno $k(n-1)<n-1$, što je nemoguće zbog $k \geq 1$ i $n \geq 2$. Dakle, mora biti $k-n-1=0$, odnosno $k=n+1$, pa je stoga $p=kn+1=(n+1)n+1=n^2+n+1$, što se i tvrdilo u zadatku.

2. Neka je tačka K sredina duži DC, tj. važi $AD=DK=KC$ (Slika). Uočimo da su uglovi trougla DEB redom $\angle DEB=90^\circ$, $\angle DBE=60^\circ$ i $\angle BDE=30^\circ$. Nadalje važi $\angle DEF=\angle DEB-\angle BEF=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. Dakle, trougao DFE je jednakokraki i stoga važi $DF=FE=BF$. Povucimo srednju liniju FK trougla BDC. Kako je srednja linija FK trougla BDC paralelna osnovici BC, dobijamo $\angle DFK=\angle DBC=60^\circ=\angle BFE=\angle DFA$, odnosno $\angle DFK=\angle DFA$. Dakle, duž FD predstavlja i srednju liniju i simetralu ugla trougla AFK, pa je stoga FD ujedno i visina trougla AFK. Otuda slijedi $\angle ADF=90^\circ$, odnosno $\angle ADB=\angle ADF=90^\circ$, što se i tvrdilo u zadatku.



Slika

3. Data nejednakost se može napisati u obliku

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)\left(\frac{1-y}{y}\right)\left(\frac{1-z}{z}\right)\left(\frac{1-t}{t}\right)\geq 81,$$

odnosno koristeći dati uslov $x+y+z+t=1$, gornja nejednakost je ekvivalentna sa

$$\left(\frac{y+z+t}{x}\right)\left(\frac{x+z+t}{y}\right)\left(\frac{x+y+t}{z}\right)\left(\frac{x+y+z}{t}\right)\geq 81.$$

Gornju nejednakost možemo pisati u obliku

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{t}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{t}{y}\right)\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{t}{z}\right)\left(\frac{x}{t}+\frac{y}{t}+\frac{z}{t}\right)\geq 81. \qquad (1)$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine (za tri broja) dobijamo

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{t}{x}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{yzt}{x^3}}\,. \qquad (2)$$

Na analogan način dobijamo sljedeće tri nejednakosti:

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{t}{y}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{xzt}{y^3}}\,, \qquad (3)$$

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{t}{z}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{xyt}{z^3}}\,, \qquad (4)$$

$$\frac{x}{t}+\frac{y}{t}+\frac{z}{t}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{xyz}{t^3}}\,. \qquad (5)$$

Konačno, množenjem nejednakosti (2), (3), (4) i (5), dobijamo

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{t}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{t}{y}\right)\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{t}{z}\right)\left(\frac{x}{t}+\frac{y}{t}+\frac{z}{t}\right)\geq 3^4\cdot\sqrt[3]{\frac{x^3y^3z^3t^3}{x^3y^3z^3t^3}}=81,$$

što predstavlja nejednakost (1), a time je dokazana i data nejednakost.

4. Stavimo $h(x)=f(x)-\sqrt{2}(x^2+1)$. Tada je

$$h(x)=ax^2+bx+2-\sqrt{2}(x^2+1)=(a-\sqrt{2})x^2+bx+(2-\sqrt{2}).$$

Po uslovu zadatka mora biti $h(x)\geq 0$ za svaki realan broj x, pa otuda i na osnovu gornjeg izraza slijedi da mora biti $a>\sqrt{2}$. Pretpostavimo da ne važi tvrđenje zadatka, tj. da postoji realan broj x_1 za koji je $h(x_1)=0$. Tada je x_1 dvostruki korijen kvadratne jednačine $h(x)=0$, jer u protivnom, ako bi za drugi njen (realan) korijen x_2 važilo $x_2\neq x_1$, uzmimo na primjer $x_1<x_2$, tada bi bilo $h(x)<0$ za svako $x\in(x_1,x_2)$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $h(x)\geq 0$ za svaki realan broj x. Kako je stoga x_1 dvostruki korijen jednačine $h(x)=0$, to za diskriminantu D od $h(x)$ na osnovu gornjeg izraza mora biti

$$D=b^2-4(a-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=0,$$

odakle slijedi

$$(b^2-8a-8)+(4a+8)\sqrt{2}=0.$$

Kako su po pretpostavci a i b cijeli brojevi, iz gornje jednakosti dobijamo $4a+8=0$ i $b^2-8a-8=0$, odnosno $a=-2$ i $b^2=-8$. Otuda slijedi da b nije realan broj, a samim time ni cijeli broj, čime je dobijena kontradikcija. Dakle, mora biti $h(x)>0$ za svaki realan broj x, što se i tvrdilo u zadatku. (Očigledno je da na primjer, kvadratni trinom $f(x)=2x^2+2$ zadovoljava uslove zadatka).

5. Neka su redom zapisani brojevi $a_1,a_2,...,a_{2n}$ i neka su njihovi redni brojevi $1,2,...,2n$. Dobijeni zbirovi su $a_1+1,a_2+2,...,a_{2n}+2n$. Neka tako dobijeni zbirovi pri dijeljenju sa $2n$ daju redom količnike $q_1,q_2,...,q_{2n}$ i ostatke $r_1,r_2,...,r_{2n}$, pri čemu je, $0\le r_i\le 2n-1$ za svako $i=1,2,...,2n$. Tada je

$$a_1+1=2nq_1+r_1,a_2+2=2nq_2+r_2,...,a_{2n}+2n=2nq_{2n}+r_{2n}.$$

Sabiranjem gornjih jednakosti i označavajući tako dobijen zbir sa S dobijamo

$$S=(a_1+1)+(a_2+2)+...+(a_{2n}+2n)=2n(q_1+q_2+...+q_{2n})+(r_1+r_2+...+r_{2n}). \quad (1)$$

Kako je po pretpostavci $a_1,a_2,...,a_{2n}$ permutacija prirodnih brojeva $1,2,...,2n$, to je

$$S=(a_1+1)+(a_2+2)+...+(a_{2n}+2n)=(a_1+a_2+...+a_{2n})+(1+2+...+2n)$$
$$=2(1+2+...+2n)=2\frac{2n(2n+1)}{2}=2n(2n+1),$$

Odnosno $S=2n(2n+1)$. Zamjenom $S=2n(2n+1)$ u jednakost (1) dobijamo

$$2n(q_1+q_2+...+q_{2n})+(r_1+r_2+...+r_{2n})=2n(2n+1). \quad (2)$$

Pretpostavimo da su svi ostaci $r_1,r_2,...,r_{2n}$ različiti. Tada važi

$$r_1+r_2+...+r_{2n}=0+1+2+...+(2n-1)=\frac{(2n-1)2n}{2}=n(2n-1). \quad (3)$$

Uvrštavajući (3) u (2) dobijamo

$$2n(q_1+q_2+...+q_{2n})=2n(2n+1)-n(2n-1)=n(2n+3),$$

odakle dijeljenjem sa n slijedi

$$2(q_1+q_2+...+q_{2n})=2n+3. \quad (4)$$

Jednakost (4) je nemoguća, jer je sa njene ijeve strane paran, a sa desne strane neparan broj. To znači da nisu svi ostaci $r_1, r_2, ..., r_{2n}$ različiti, odnosno da među tim ostacima postoje barem dva jednaka. Tada uzimajući da je $r_i = r_j$ za dva prirodna broja i i j takva da je $1 \leq i < j \leq 2n$, dobijamo $(a_i + i) - (a_j + j) = (2nq_i + r_i) - (2nq_j + r_j) = 2n(q_i - q_j)$, odakle slijedi da je razlika brojeva $a_i + i$ i $a_j + j$ djeljiva sa $2n$. Time je tvrđenje dokazano.