



ispitni centar

PRAVA
MJERA
ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2017.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

Podgorica, 20..... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

Vrijeme za izradu zadataka: 240 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 bodova (5 zadataka nosi maksimalno 100 bodova).

Pri izradi zadataka učenik može koristiti geometrijski pribor. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobilnih telefona i ostalih elektronskih sredstava.

ZADACI

1. Neka su a , b i c pozitivni realni brojevi. Dokazati da važi nejednakost

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

☐

2. U koordinatnoj ravni dato je pet tačaka A_1 , A_2 , A_3 , A_4 i A_5 sa cjelobrojnim koordinatama. Dokazati da među tih pet tačaka postoje barem dvije tačke tako da prava koja je njima određena sadrži još barem jednu tačku sa cjelobrojnim koordinatama.

☐

3. Neka su k , l , m i n prirodni brojevi i p prost broj veći od 3 za koje važi jednakost

$$p^k + p^l + p^m = n^2.$$

Dokazati da je broj $p+1$ djeljiv sa 8.

☐

4. Dato je pet duži od kojih je svaka duža od 5 cm, a kraća od 25 cm. Dokazati da među tim dužima postoje tri duži od kojih se može sastaviti trougao.

☐

5. Neka je ABC oštrogli trougao sa ortocentrom H . Dokazati da važi

$$AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

pri čemu su a , b i c dužine stranica trougla ABC , a h_a , h_b i h_c dužine visina trougla ABC spuštene redom na stranice BC , CA i AB .

☐

RJEŠENJA

1. Prvo rješenje. Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja (tj. nejednakost $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ za $x > 0$ i $y > 0$), dobijamo

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2)^2 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \\&= (a^4 + b^2c^2) + (b^4 + c^2a^2) + (c^4 + a^2b^2) + \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} + \frac{b^2c^2 + c^2a^2}{2} + \frac{c^2a^2 + a^2b^2}{2} \\&\geq 2\sqrt{a^4b^2c^2} + 2\sqrt{b^4c^2a^2} + 2\sqrt{c^4a^2b^2} + \sqrt{a^2b^4c^2} + \sqrt{b^2c^4a^2} + \sqrt{c^2a^4b^2} = \\&3(a^2bc + b^2ca + c^2ab) = 3abc(a + b + c),\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a + b + c),$$

što se i tvrdilo u zadatku. Iz prethodnog dokaza slijedi da jednakost u datoj nejednakosti važi ako i samo ako je $a = b = c$.

Drugo rješenje. Na osnovu nejednakosti između kvadratne i geometrijske sredine za tri pozitivna broja važi

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \sqrt[3]{abc},$$

odakle stepenovanjem sa 3 slijedi

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3} \geq abc. \quad (1)$$

S druge strane, na osnovu nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine za tri pozitivna broja važi

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}. \quad (2)$$

Množenjem nejednakosti (1) i (2) neposredno se dobija

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{9} \geq \frac{abc(a + b + c)}{3},$$

odakle slijedi

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a + b + c),$$

što se i tvrdilo u zadatku. Iz prethodnog dokaza slijedi da jednakost u datoj nejednakosti važi ako i samo ako je $a = b = c$.

2. Neka su date tačke date svojim koordinatama kao $A_k(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Date tačke grupišimo u četiri klase na sljedeći način. U prvu klasu uvrstimo tačke $A_k(x_k, y_k)$ čije su obje koordinate x_k i y_k parni brojevi; u drugu klasu uvrstimo tačke $A_k(x_k, y_k)$ čije su obje koordinate x_k i y_k neparni parni brojevi; u treću klasu uvrstimo tačke $A_k(x_k, y_k)$ čija je koordinata x_k paran broj, a koordinata y_k neparan broj; u četvrtu klasu uvrstimo tačke $A_k(x_k, y_k)$ čija je koordinata x_k neparan broj, a koordinata y_k paran broj. Tada na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da među datih pet tačaka postoje barem dvije tačke $A_i(x_i, y_i)$ i $A_j(x_j, y_j)$ ($1 \leq i < j \leq 5$) koje pripadaju istoj klasi. To znači da za koordinate te dvije tačke važi $x_i \equiv x_j \pmod{2}$ i $y_i \equiv y_j \pmod{2}$. Kako središte $S(x, y)$ duži $\overline{A_i A_j}$ ima koordinate $x = \frac{x_i + x_j}{2}$ i $y = \frac{y_i + y_j}{2}$, iz prethodno navedenog slijedi da tačka $S(x, y)$ ima cjelobrojne koordinate. Kako tačka $S(x, y)$ leži na pravoj $A_i A_j$, time je tvđenje zadatka dokazano.

3. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $k \leq l \leq m$. Tada datu jednakost pišemo kao

$$p^k (1 + p^{l-k} + p^{m-k}) = n^2. \quad (1)$$

Iz jednakosti (1) i pretpostavke da je $p > 3$ prost broj slijedi da je n neparan prirodan broj. Ako stavimo $n = 2r - 1$, pri čemu je r prirodan broj, tada važi

$$n^2 \equiv (2r - 1)^2 = 4r(r - 1) + 1 \equiv 1 \pmod{8}. \quad (2)$$

(U (2) smo koristili činjenicu da je $r(r - 1)$ paran broj i stoga je $4r(r - 1)$ djeljivo sa 8). Kako je po pretpostavci p prost broj veći od 3, to su očigledno brojevi p^k i $1 + p^{l-k} + p^{m-k}$ relativno prosti. Otuda i iz činjenice da je na osnovu jednakosti (1) n^2 djeljivo sa p^k , slijedi da je k paran broj. Ako stavimo $k = 2s$ i $p = 2q + 1$, pri čemu su s i $q \geq 2$ prirodni brojevi, tada važi

$$p^k = (2q+1)^{2s} = (4q(q+1)+1)^s \equiv 1(\text{mod } 8). \quad (3)$$

Iz jednakosti (1) i kongruencija (2) i (3) slijedi

$$1 + p^{l-k} + p^{m-k} \equiv 1(\text{mod } 8),$$

odnosno

$$p^{l-k} + p^{m-k} \equiv 0(\text{mod } 8). \quad (4)$$

Kongruenciju (4) možemo napisati u obliku

$$p^{l-k}(1 + p^{m-l}) \equiv 0(\text{mod } 8),$$

odakle slijedi

$$1 + p^{m-l} \equiv 0(\text{mod } 8). \quad (5)$$

Iz kongruencije (5) i iz pretpostavke $m \geq l$ slijedi da je $m-l$ neparan prirodan broj (u protivnom bi na isti način kao u (3) dobili $1 + p^{m-l} \equiv 2(\text{mod } 8)$, što je u kontradikciji sa kongruencijom (5)). Ako stavimo $m-l=2t-1$, gdje je t prirodan broj, tada kao prethodno stavljajući $p=2q+1$, pri čemu je $q \geq 2$ prirodan broj, slično kao u (3) slijedi

$$p^{m-l} = p^{2(t-1)} p \equiv (2q+1)^{2(t-1)} p \equiv (4q(q+1)+1)^{t-1} p \equiv p(\text{mod } 8). \quad (6)$$

Konačno, iz kongruencija (5) i (6) slijedi

$$1 + p \equiv 0(\text{mod } 8),$$

tj. broj $p+1$ je djeljiv sa 8, što se i tvrdilo u zadatku.

4. Neka su dužine datih duži a , b , c , d i e , pri čemu ne smanjujući opštost možemo pretpostaviti da je $5cm < a \leq b \leq c \leq d \leq e < 25cm$. Pretpostavimo suprotno, tj. da se ni od koje trojke od pet datih duži ne može sastaviti trougao. Od duži a , b i c se ne može sastaviti trougao ako je $c \geq a+b$, odakle na osnovu pretpostvke da je $a+b > 5cm+5cm=10cm$ slijedi $c > 10cm$. Nadalje, od duži b , c i d se ne može sastaviti trougao ako je $d \geq b+c$, odakle s obzirom da je $b+c > 5cm+10cm=15cm$ slijedi $d > 15cm$. Konačno, od duži c , d i e se ne može sastaviti trougao ako je $e \geq c+d$, odakle s obzirom da je $c+d > 10cm+15cm=25cm$, slijedi $e > 25cm$. Kako je po pretpostavci $e < 25cm$, dobili smo kontradikciju, što znači da postoje tri duži među datih pet duži od kojih se može sastaviti trougao.

5. Neka su D , E i F podnožja visina spuštenih iz vrhova trougla ABC redom na stranice BC , CA i AB (donja slika). Kako je $\angle AFH + \angle AEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, zaključujemo da je četverougao $AEHF$ tetivni. Na analogan način slijedi da su i četverouglovi $BFHD$ i $CDHE$ takođe tetivni. Koristeći potenciju tačke A u odnosu na kružnice opisane oko četverouglova $BFHD$ i $CDHE$, redom dobijamo

$$AH \cdot AD = AF \cdot AB, \quad (1)$$

$$AH \cdot AD = AE \cdot CA. \quad (2)$$

Slično, koristeći potenciju tačke B u odnosu na kružnice opisane oko četverouglova $AEHF$ i $CDHE$, redom dobijamo

$$BH \cdot BE = BF \cdot AB, \quad (3)$$

$$BH \cdot BE = BD \cdot BC. \quad (4)$$

Analogno, koristeći potenciju tačke C u odnosu na kružnice opisane oko četverouglova $BFHD$ i $AEHF$, redom dobijamo

$$CH \cdot CF = CD \cdot BC, \quad (5)$$

$$CH \cdot CF = CE \cdot CA. \quad (6)$$

Sabiranjem jednakosti (1)-(6) dobijamo

$$2(AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF)$$

$$= (AF + BF) \cdot AB + (BD + CD) \cdot BC + (AE + CE) \cdot CA,$$

odakle zamjenom $AF + BF = AB = c$, $BD + CD = BC = a$, $AE + CE = CA = b$, $AD = h_a$, $BE = h_b$ i $CF = h_c$ slijedi

$$2(AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c) = a^2 + b^2 + c^2,$$

odnosno

$$AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

što se i tvrdilo u zadatku.

