ispitni centar
PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2016.

ŠIFRA UČENIKA

SREDNJA ŠKOLA

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

Vrijeme za izradu zadataka: 240 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 bodova (5 zadataka nosi maksimalno 100 bodova).

Pri izradi zadataka učenik može koristiti geometrijski pribor. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobilnih telefona i ostalih elektronskih sredstava.

ZADACI

1. Odrediti sve uređene trojke realnih brojeva (x,y,z) za koje važi

$$6\left(x-\frac{1}{y}\right)=3\left(y-\frac{1}{z}\right)=2\left(z-\frac{1}{x}\right)=xyz-\frac{1}{xyz}.$$

2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje važi

$$\frac{1}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{b\sqrt{b}}+\frac{1}{c\sqrt{c}}=3.$$

Dokazati da važi

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 6\sqrt{abc}.$$

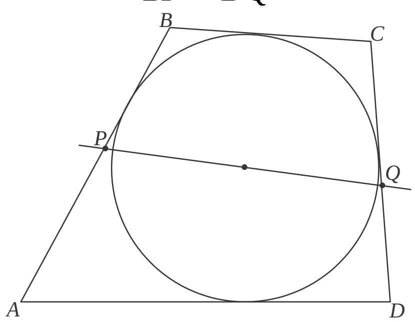
3. Odrediti sve proste brojeve p i q za koje važi jednakost

$$p^3-q^5=(p+q)^2.$$

4. Realni brojevi $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ napisani su na kružnici u datom redoslijedu. Poznato je da je zbir bilo koja dva broja koja se nalaze redom u tom nizu od 7 brojeva veći ili jednak od 2 (npr. takvi su zbirovi a_2+a_3 i a_7+a_1). Osim toga, zbir bilo koja tri broja koji se nalaze redom u tom nizu je manji ili jednak od 4 (npr. takvi su zbirovi $a_1+a_2+a_3$ i $a_7+a_1+a_2$). Koliku najveću vrijednost može imati razlika a_1-a_2? Navesti primjer niza od sedam brojeva raspoređenih na kružnici za koji se dostiže ta vrijednost razlike.

5. Kroz središte kružnice upisane u četvorougao $ABCD$ povučena je prava (vidjeti donju sliku). Ta prava siječe stranicu AB u tački P i stranicu CD u tački Q. Ako je $\angle APQ=\angle DQP$, dokazati da važi

$$\frac{AP}{BP}=\frac{CQ}{DQ}.$$



RJEŠENJA

1. Prvo rješenje. Na osnovu datih jednakosti redom slijedi

$$x-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\left(xyz-\frac{1}{xyz}\right),\ y-\frac{1}{z}=\frac{1}{3}\left(xyz-\frac{1}{xyz}\right)\ \text{i}\ z-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(xyz-\frac{1}{xyz}\right).$$

Sabiranjem gornjih jednakosti slijedi,

$$(x+y+z)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=xyz-\frac{1}{xyz}. \tag{1}$$

S druge strane, važi identitet

$$\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(y-\frac{1}{z}\right)\left(z-\frac{1}{x}\right)=xyz-\frac{1}{xyz}-\left((x+y+z)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right). \tag{2}$$

Iz jednakosti (1) i (2) neposredno slijedi

$$\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(y-\frac{1}{z}\right)\left(z-\frac{1}{x}\right)=0,$$

što možemo pisati kao

$$\frac{(xy-1)(yz-1)(xz-1)}{xyz}=0.$$

Prema tome, barem jedan od izraza $xy-1$, $yz-1$, $xz-1$ mora biti jednak nuli, odakle na osnovu datih jednakosti neposredno slijedi da je i svaki od tih izraza jednak nuli, tj. $xy=yz=xz=1$. Otuda i na osnovu zadnje date jednakosti slijedi $(xyz)^2=1$, odnosno $xyz=\pm1$. Ako je $xyz=1$, dobijamo $x=y=z=1$. Ako je $xyz=-1$, dobijamo $x=y=z=-1$. Dakle, rješenja date jednačine su uređene trojke $(x,y,z)=(1,1,1)$ i $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$.

Drugo rješenje. Na osnovu datih jednakosti redom slijedi

$$x-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\left(xyz-\frac{1}{xyz}\right),\ y-\frac{1}{z}=\frac{1}{3}\left(xyz-\frac{1}{xyz}\right)\ \text{i}\ z-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(xyz-\frac{1}{xyz}\right).$$

Sabiranjem gornjih jednakosti slijedi

$$x-\frac{1}{y}+y-\frac{1}{z}+z-\frac{1}{x}=xyz-\frac{1}{xyz},$$

odnosno

$$\frac{x^2y^2z^2-1-x^2yz+xz-y^2xz+xy-z^2xy+yz}{xyz}=0. \tag{3}$$

Brojilac razlomka na lijevoj strani jednakosti (3) može se transformisati kao

$$x^2y^2z^2-1-x^2yz+xz-y^2xz+xy-z^2xy+yz$$
$$=(x^2y^2z^2-z^2xy)-(x^2yz-xz)-(y^2xz-yz)+(xy-1)$$
$$=xyz^2(xy-1)-xz(xy-1)-yz(xy-1)+(xy-1)=(xy-1)(xyz^2-xz-yz+1)=$$
$$(xy-1)(xz(yz-1)-(yz-1))=(xy-1)(yz-1)(xz-1),$$

što uvršteno u gornju jednakost daje

$$\frac{(xy-1)(yz-1)(xz-1)}{xyz}=0.$$

Prema tome, barem jedan od izraza $xy-1$, $yz-1$, $xz-1$ mora biti jednak nuli, odakle na osnovu datih jednakosti neposredno slijedi da je i svaki od tih izraza jednak nuli, tj. $xy=yz=xz=1$. Otuda i na osnovu zadnje date jednakosti slijedi $(xyz)^2=1$, odnosno $xyz=\pm1$. Ako je $xyz=1$, slijedi $x=y=z=1$. Ako je $xyz=-1$, slijedi $x=y=z=-1$. Dakle, rješenja date jednačine su uređene trojke $(x,y,z)=(1,1,1)$ i $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$.

2. **Prvo rješenje.** Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja (tj. nejednakost $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ za $x>0$ i $y>0$), dobijamo

$$\frac{1}{2}\left(ab+\frac{1}{c^2}\right)\geq\sqrt{\frac{ab}{c^2}},$$

odnosno

$$ab+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{c}. \qquad (1)$$

Na isti način slijedi

$$bc+\frac{1}{a^2}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{a}, \qquad (2)$$

$$ca+\frac{1}{b^2}\geq\frac{2\sqrt{ca}}{b}. \qquad (3)$$

Sabiranjem nejednaksti (1), (2) i (3) slijedi

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{2\sqrt{bc}}{a}+\frac{2\sqrt{ca}}{b}=2\sqrt{abc}\left(\frac{1}{c\sqrt{c}}+\frac{1}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{b\sqrt{b}}\right),$$

odakle se koristeći dati uslov $\frac{1}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{b\sqrt{b}}+\frac{1}{c\sqrt{c}}=3$ dobija

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq6\sqrt{abc},$$

što se i tvrdilo u zadatku. Iz prethodnog dokaza slijedi da jednakost u datoj nejednakosti važi ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Drugo rješenje. Polazeći od očigledne nejednakosti

$$\left(\sqrt{ab}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\sqrt{bc}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\sqrt{ca}-\frac{1}{b}\right)^2\geq0,$$

nakon kvadriranja izraza na lijevoj strani slijedi

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{2\sqrt{bc}}{a}+\frac{2\sqrt{ca}}{b}=2\sqrt{abc}\left(\frac{1}{c\sqrt{c}}+\frac{1}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{b\sqrt{b}}\right),$$

odakle se, koristeći dati uslov $\frac{1}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{b\sqrt{b}}+\frac{1}{c\sqrt{c}}=3$, dobija

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 6\sqrt{abc},$$

što se i tvrdilo u zadatku. Iz prethodnog dokaza slijedi da jednakost u datoj nejednakosti važi ako i samo ako je $a=b=c=1$.

3. Pretpostavimo prvo da su oba broja p i q različita od 3. Tada je $p^2\equiv q^2\equiv q^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, pa otuda i iz date jednakosti slijedi

$$p-q\equiv (p+q)^2(\mathrm{mod}\,3). \qquad (1)$$

Ako oba broja p i q daju ostatak 1 ili ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, tada je izraz na lijevoj strani kongruencije (1) djeljiv sa 3, a na desnoj nije djeljiv sa 3, pa je taj slučaj nemoguć. Ukoliko oba broja p i q daju različite ostatke pri dijeljenju sa 3, tada je desna strana kongruencije (1) djeljiva sa 3, a lijeva strana nije djeljiva sa 3. Dakle, barem jedan od brojeva p i q mora biti jednak 3. Ako je $p=3$, tada iz date jednakosti slijedi $27-q^5>0$, što je očigledno nemoguće. Ako je $q=3$, to uvršteno u datu jednakost daje $p^3-243=(p+3)^2$, odnosno

$$p(p^2-p-6)=252. \qquad (2)$$

Kako je $252=2^2\cdot 3^2\cdot 7$, to na osnovu jednakosti (1) slijedi da je p barem jedan od brojeva 2, 3 ili 7. Uvrštavanjem redom tih vrijednosti u jednakost (2) dobijamo da jedino $p=7$ zadovoljava tu jednakost. Dakle, jedino uređeni par prostih brojeva $(p,q)=(7,3)$ zadovoljava datu jednakost.

4. Date brojeve podijelimo u četiri grupe tako da prvu grupu čini samo broj a_1, a ostale tri grupe čine sljedeći parovi brojeva: (a_2,a_3), (a_4,a_5) i (a_6,a_7). Po uslovu zadatka zbir brojeva u svakoj od tri prethodne grupe je ≥ 2. Otuda slijedi da za zbir S svih sedam datih brojeva važi nejednakost

$$S=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+(a_6+a_7)\geq a_1+3\cdot 2=a_1+6,$$

odnosno

$$S\geq a_1+6. \qquad (1)$$

S druge strane, date brojeve podijelimo u tri grupe tako da prvu grupu čini samo broj a_2, a ostale dvije grupe čine trojke brojeva (a_3,a_4,a_5) i (a_6,a_7,a_1). Po uslovu zadatka zbir brojeva u svakoj od prethodne dvije grupe je ≤ 4. Stoga, zbir S svih sedam datih brojeva zadovoljava nejednakost

$$S=a_2+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_1)\leq a_2+2\cdot 4=a_2+8,$$

odnosno

$$S\leq a_2+8. \qquad (2)$$

Iz nejednakosti (1) i (2) slijedi

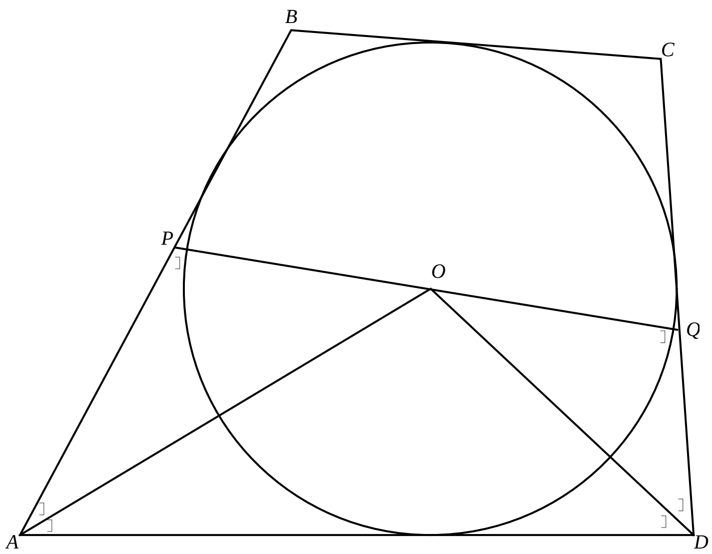
$$a_1 + 6 \le a_2 + 8,$$

odnosno

$$a_1 - a_2 \le 2.$$

Dakle, najveća vrijednost koju može da ima razlika $a_1 - a_2$ je ≤ 2. Za sljedeći niz od 7 brojeva napisanih redom na krugu razlika $a_1 - a_2$ je jednaka 2: $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$, $a_4 = 0$, $a_5 = 2$, $a_6 = 0$, $a_7 = 2$.

5. Neka je O središte kružnice upisane u četvorougao $ABCD$ (slika).



Slika

Tada tačka O leži na simetralama uglova $\angle PAD$ i $\angle QDA$. Neka je $\alpha = \angle PAO = \angle OAD$, $\beta = \angle QDO = \angle ODA$ i $\gamma = \angle APO = \angle DQO$ (po uslovu zadatka). Uočimo da je

$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$ (zbir uglova u u četvorouglu $ADQP$),

odnosno

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Na osnovu gornje jednakosti iz trougla QOD slijedi $\angle QOD = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha$, a iz trougla POA slijedi $\angle POA = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = \beta$. Dakle, trouglovi APO i OQD imaju iste uglove, pa su to slični trouglovi. Iz te sličnosti slijedi

$$\frac{AP}{OQ} = \frac{OP}{DQ},$$

odnosno

$$AP \cdot DQ = OP \cdot OQ. \qquad (1)$$

Na sasvim analogan način iz sličnosti trouglova BPO i OQC (njihova sličnost slijedi analogno kao sličnost trouglova APO i OQD, imajući u vidu da je $\angle BPO = \angle CQO = 180^\circ - \gamma$), dobija se

$$\frac{BP}{OQ} = \frac{OP}{CQ},$$

odnosno

$$BP \cdot CQ = OP \cdot OQ. \tag{2}$$

Iz jednakosti (1) i (2) neposredno slijedi $AP \cdot DQ = BP \cdot CQ$, odnosno

$$\frac{AP}{BP} = \frac{CQ}{DQ},$$

što se i tvrdilo u zadatku.