ispitni centar
PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2014.

ŠIFRA UČENIKA

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	1.	2.	3.	4.	5.
Maksimalan broj poena	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Odrediti vrijednost izraza $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, ako je $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=3$.

2. Izračunati $\sqrt{a^2+b^2}$, ako je $a=\underbrace{555\ldots5}_{2014}$ i $b=1\underbrace{333\ldots3}_{2013}2$.

3. Naći najmanji prirodan broj n takav da se brisanjem njegove prve cifre slijeva dobija 57 puta manji broj.

4. Težišne duži trougla ΔABC imaju dužine 9, 12 i 15. Odrediti dužinu stranice kojoj odgovara najduža težišna duž.

5. Na tetivi AB kružnice k data je tačka P tako da je $AP=2PB$. Tetiva DE normalna je na tetivu AB u tački P. Dokazati da je središte duži AP ortocentar trougla ΔAED.

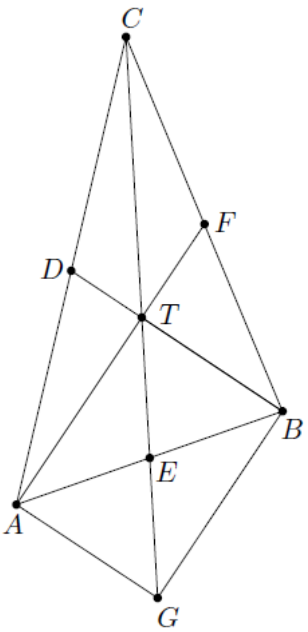
RJEŠENJA ZADATAKA

1. Iz
$$3=\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$$
$$=\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$$
dobijamo $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{3}{2}$, pa je $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$.

2. Neka je $m=\underbrace{111\ldots1}_{2014}$. Tada je $a=5m$ i
$$b=\underbrace{111\ldots1}_{2014}0+\underbrace{222\ldots2}_{2014}=10m+2m=12m.$$
Slijedi:
$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25m^2+144m^2}=\sqrt{169m^2}=13m$$
$$=13\cdot\underbrace{111\ldots1}_{2014}$$
$$=10\cdot\underbrace{111\ldots1}_{2014}+3\cdot\underbrace{111\ldots1}_{2014}$$
$$=\underbrace{111\ldots1}_{2014}0+\underbrace{333\ldots3}_{2014}$$
$$=1\underbrace{444\ldots4}_{2013}3.$$

3. Neka je x prva cifra slijeva broja n i y broj dobijen od broja n precrtavanjem cifre x. Pretpostavimo da broj n ima k cifara. Po uslovu zadatka je
$$n-10^{k-1}x=\frac{n}{57},$$
odnosno
$$10^{k-1}x+y-10^{k-1}x=\frac{10^{k-1}x+y}{57},$$
pa dobijamo
$$56y=10^{k-1}x=2^{k-1}\cdot5^{k-1}\cdot x \quad\Leftrightarrow\quad 7\cdot8\cdot y=2^{k-1}\cdot5^{k-1}\cdot x,$$
a odatle slijedi da x mora biti jednako 7, jer $2^{k-1}\cdot5^{k-1}$ nije djeljivo sa 7 ni za jedan broj k. Slijedi da je $y=\frac{2^{k-1}\cdot5^{k-1}}{2^3}=2^{k-4}\cdot5^{k-1}$. Broj y je prirodan broj ako je $k\geq4$ i $y=5^3=125$ za $k=4$, pa je traženi broj
$$n=10^3\cdot7+125=7125.$$

4. Neka su $t_a=12$, $t_b=9$ i $t_c=15$ dužine težišnih duži trougla ΔABC i neka je T težište tog trougla. Treba odrediti dužinu stranice AB. Neka su D, E i F redom središta stranica CA, AB I BC. Težište dijeli težišne duži u odnosu 2:1, pa važi:



$$|AT| = 8, |TF| = 4, \quad |BT| = 6, |TD| = 3, \quad |CT| = 10, |TE| = 5.$$

Neka je G tačka na pravoj CE takva da je E središte duži TG ($|EG| = |TE| = 5$).

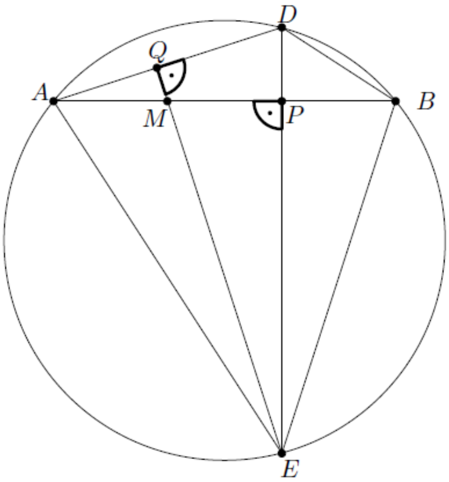
Četvorougao $AGBT$ je paralelogram, jer se dijagonale AB i TG uzajamno polove, pa dobijamo

$$|BG| = |AT| = 8 \text{ i } |AG| = |BT| = 6.$$

Trougao ΔAGT, čije stranice imaju dužine 6, 8 i 10 je pravougli s pravim uglom kod tjemena A, jer je $10^2 = 6^2 + 8^2$. Slijedi da je četvorougao $AGBT$ pravougaonik ($\angle TAG = 90^\circ$), pa je $|AB| = |TG| = 10$.

5. Označimo sa M središte duži AP. Neka prava EM siječe pravu AD u tački Q. Važi

$$\Delta MPE \cong \Delta BPE,$$



jer su oba pravougla i imaju jednake katete, pa važi

$$\angle QAM = \underbrace{\angle DAB = \angle DEB}_{\text{kao periferijski uglovi nad lukom DB}} = \angle PEB = \angle PEM.$$

Kako je $\angle QMA = \angle EMP$ (kao unakrsni uglovi), to je

$$\angle AQM = \angle MPE = 90^\circ,$$

pa su EQ i AP visine trougla ΔAED i tačka M je kao tačka presjeka visina ortocentar.