ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2017.

ŠIFRA UČENIKA

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maksimalan broj poena	**25**	**25**	**25**	**25**

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Dokazati da važi

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{100}}<\frac{43}{10}.$$

2. Izračunati uglove trougla ΔABC, ako težišna duž, bisektrisa ugla i visina iz tjemena C dijele ugao $\angle ACB$ na četiri jednaka dijela.

3. Naći sve prirodne brojeve n takve da je broj

$$2^4\cdot 3^{16}+5^2\cdot 3^{14}+3^n$$

potpun kvadrat.

4. Marko ima „zanimljivi" digitron koji, kada se unese neki broj i pritisne taster „unos", rotira taj broj za 180°, odnosno zamijeni mjesta prvoj i posljednjoj cifri, drugoj i pretposljednjoj itd. Pri tome cifru 6 zamijeni cifrom 9, cifru 9 zamijeni cifrom 6, cifre 0, 1 i 8 ne mijenja, a ukoliko broj sadrži cifru različitu od 0, 1, 6, 8, 9, onda se na displeju pojavljuje „GREŠKA". Npr. ako Marko unese broj 1608, onda se na displeju pojavljuje broj 8091, dok se za unos broja 1121, na displeju pojavljuje „GREŠKA". Koliko devetocifrenih brojeva Marko može ukucati, ali tako da se vrijednost broja ne promijeni?

RJEŠENJA ZADATAKA

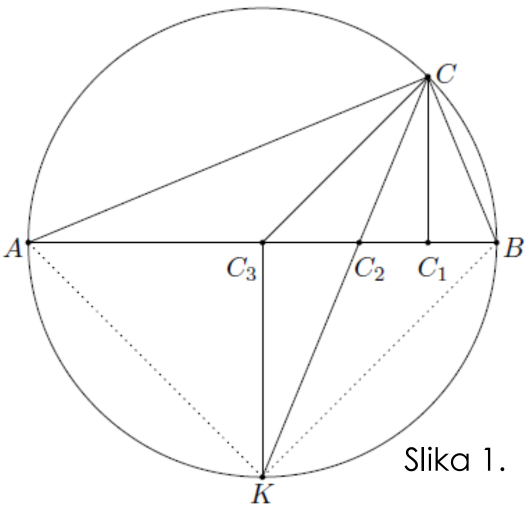
1. Racionaisanjem imenilaca dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{100}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4}}{\sqrt{2}-\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{4}-\sqrt{6}}{\sqrt{4}-\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{100}}\cdot\frac{\sqrt{98}-\sqrt{100}}{\sqrt{98}-\sqrt{100}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4}}{-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{6}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{100}}{-2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-10}{-2}$$
$$=\frac{10-\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{50-5\sqrt{2}}{10}<\frac{43}{10}.$$

Ovdje smo iskoristili smo nejednakost $5\sqrt{2}>7$. Zaista,

$$5\sqrt{2}>7 \Leftrightarrow 50>49.$$

2. Neka je k opisana kružnica trougla ΔABC i neka je C_1 podnožje visine iz tjemena C, C_2 tačka presjeka bisektrise ugla $\angle ACB$ i stranice AB, C_3 središte stranice AB i K tačka presjeka bisektrise ugla $\angle ACB$ i kružnice k (slika 1).



Slika 1.

Kako je CK bisektrisa ugla $\angle ACB$, to važi $\angle ACK=\angle BCK$. Sa druge strane važi $\angle BAK=\angle BCK$, kao periferjiski uglovi nad lukom BK i $\angle ABK=\angle ACK$ kao periferjiski uglovi nad lukom AK, pa je $\angle BAK=\angle ABK$, ondosno trougao ΔABK je jednakokraki sa osnovicom AB. Slijedi da je prava KC_3 simetrala stranice AB. Iz $CC_1 \parallel C_3K$ slijedi $\angle C_1CC_2=\angle C_2KC_3$, a po uslovu zadatka je $\angle C_1CC_2=\angle C_2CC_3$, pa je trougao ΔCKC_3 jednakokraki sa $|CC_3|=|KC_3|$. Slijedi da je C_3 centar opisane kružnice k, jer je centar opisane kružnice presjek prave KC_3 i simetrale duži CK, pa kako je C_3 središte stranice AB, to je trougao ΔABC pravougli sa pravim uglom kod tjemena C. Koristeći uslov zadatka dobijamo

$$\angle CBA = 90^\circ - \frac{90^\circ}{4} = 67^\circ 30' \text{ i } \angle BAC = 90^\circ - 67^\circ 30' = 22^\circ 30'.$$

3. Neka je k prirodan broj takav da važi

$$2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n = k^2,$$

odnosno,

$$169 \cdot 3^{14} + 3^n = k^2.$$

Razlikovaćemo dva slučaja (1) $n \leq 14$ i (2) $n > 14$.
(1) Neka je $n \leq 14$. Treba odrediti n tako da važi

$$3^n(169 \cdot 3^{14-n} + 1) = k^2.$$

Kako broj $169 \cdot 3^{14-n} + 1$ nije djeljiv sa 3, slijedi da n mora biti paran broj. Neka je $n = 2m$. Broj

$$169 \cdot 3^{14-n} + 1 = (13 \cdot 3^{7-m})^2 + 1$$

nije potpun kvadrat, pa za $n \leq 14$ nema rješenja.
(2) Neka je $n > 14$. Treba odrediti n tako da važi

$$3^{14}(169 + 3^{n-14}) = k^2,$$

odnosno $169 + 3^{n-14} = p^2$ za neki prirodan broj p. Sada je

$$3^{n-14} = p^2 - 169 = (p-13)(p+13),$$

pa je $p - 13 = 3^a$ i $p + 13 = 3^b$, i pri tome je $a + b = n - 14$ i $a \leq b$. Slijedi

$$3^b - 3^a = 26 \Leftrightarrow 3^a(3^{b-a} - 1) = 26.$$

Kako broj 26 nije djeljiv sa 3, to mora važiti $a = 0$ i $3^b = 27$, odnosno $a = 0$ i $b = 3$. Dakle, $p = 14$ i $n = 17$.

4. Neka je $\overline{abcdefghi}$ devetocifreni broj. Zahtijeva se da $\overline{abcdefghi}$ ne promijeni vrijednost nakon „rotacije za 180°", pa mora važiti

$$e \in \{0,1,8\},\ a \in \{1,6,8,9\},\ b,c,d \in \{0,1,6,8,9\},$$

dok su cifre f, g, h, i, jednoznačno određene ciframa a, b, c, d.
Traženih brojeva ima $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 1500$.