ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2015.

ŠIFRA UČENIKA

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
Maksimalan broj poena	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Uporediti brojeve

$$A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} \quad \text{i} \quad B=\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}.$$

2. Dokazati da je broj $2015^{2015}-2015$ djeljiv sa 24.

3. Neka su $\angle CAB=60^\circ$ i $\angle ACB=15^\circ$ unutrašnji uglovi trougla ΔABC, i neka je r dužina poluprečnika opisane kružnice oko tog trougla. Izračunati površinu trougla ΔABC.

4. Neka je ΔABC jednakokrako-pravougli trougao sa pravim uglom kod tjemena C i neka je D podnožje visine iz tjemena C. Ako bisektrisa ugla $\angle CAB$ siječe visinu CD u tački E, dokazati da je $CB+CE=AB$.

5. Naći broj četvorocifrenih prirodnih brojeva $\overline{abcd}$ takvih da je $a+b=c+d$ i $a^2+b^2=c^2+d^2$.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Uočimo da je $13+4\sqrt{3}=13+2\cdot 2\sqrt{3}=1+2\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2=\left(1+2\sqrt{3}\right)^2$.
Slijedi da je $5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}$, pa iz $4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ dobijamo $3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+2$, pa je $A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+2}<\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2+2}=\frac{1}{2}$.

Koristeći jednakost $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
B&=\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}\\
&=\left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}+\frac{3(\sqrt{3}+2)}{3-4}+\frac{15(3+\sqrt{3})}{9-3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}\\
&=\left(\frac{6(\sqrt{3}+1)-18(\sqrt{3}+2)+15(3+\sqrt{3})}{6}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}\\
&=\left(\frac{3\sqrt{3}+15}{6}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

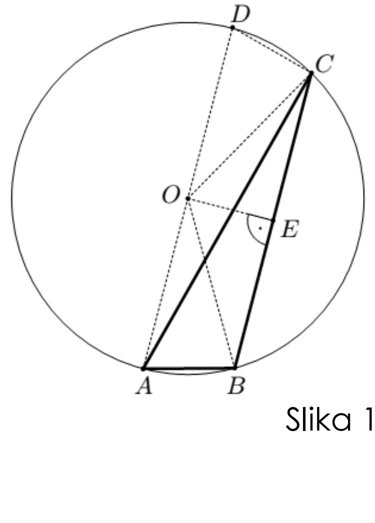
Slijedi da je $A<B$.

2. Broj $2015^{2015}-2015$ jednak je proizvodu

$$2015\cdot\left(2015^{2014}-1\right)=2015\cdot\left(2015^{1007}-1\right)\cdot\left(2015^{1007}+1\right)$$

Kako su $2015^{1007}-1$ i $2015^{1007}+1$ uzastopni parni brojevi, tačno jedan od njih je djeljiv sa 4, a drugi samo sa 2 (ne i sa 4). Proizvod ta dva broja je djeljiv sa 8.
Broj 2015 nije djlejiv sa 3, pa ni 2015^{1007} nije djeljiv sa 3. Tada je $2015^{1007}-1$ ili $2015^{1007}+1$ djeljivo sa 3, jer od 3 uzastopna prirodna broja jedan mora biti djeljiv sa 3. Slijedi da je broj $2015^{2015}-2015$ djeljiv i sa 3 i sa 8, odnosno djeljiv je sa 24.

3. Neka je O centar opisane kružnice trougla ΔABC (slika 1). Kako je trougao ΔABC tupougli ($\angle ABC=105^\circ$), to tačka O ne pripada unutrašnjosti trougla ABC i tačke O i B se nalaze sa različitih strana prave AC.
Označimo sa D presjek poluprave AO i date kružnice.
Ugao $\angle ACD$ je periferijski ugao nad prečnikom, pa je $\angle ACD=90^\circ$. Kako su



Slika 1.

uglovi $\angle ADC$ i $\angle ABC$ periferijski uglovi nad AC, i njihova tjemena su sa različitih strana tetive AC, to je

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 75^\circ.$$

Slijedi da je $\angle DAC = 15^\circ = \angle ACB$, a to povlači $BC \parallel AD$, odnosno četvorougao $ABCD$ je trapez.

Ugao $\angle BOC$ jednakokrakog trougla ΔOBC ($OB = OC$) jednak je $2\angle CAB = 120^\circ$, jer je centralni ugao dva puta veći od periferijskog ugla nad istim lukom, pa je $\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$.

Neka je E podnožje visine iz tjemena O u trouglu OBC.

Trougao ΔOEB je pravougli sa oštrim uglovima $\angle EBO = 30^\circ$ i $\angle EOB = 60^\circ$ i hipotenuzom dužine r, pa važi

$$|BE| = \frac{r\sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad |OE| = \frac{r}{2}.$$

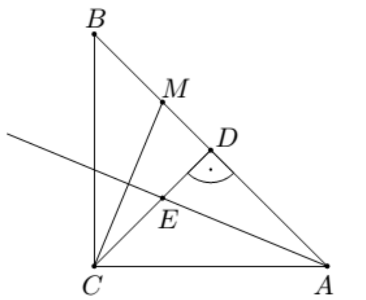
Površinu trougla ΔABC dobijamo kao razliku površina trapeza $ABCD$ i trougla ΔACD:

$$P_{\Delta ABC} = P_{ABCD} - P_{\Delta ACD} = \frac{2r + r\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

4. Neka je M tačka hipotenuze AB takva da je $AC = AM$ (slika 2). Trougao ΔCAM je jednakokraki sa osnovicom CM i

$$\angle ACM = \angle AMC = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67^\circ 30',$$

pa je $\angle BCM = 22^\circ 30'$. Trouglovi ΔCAE i ΔCBM su podudarni, jer je $\angle CAE = \angle BCM = 22^\circ 30'$, $AC = BC$ i $\angle ACE = \angle CBM = 45^\circ$. Slijedi da je $BM = CE$, i najzad dobijamo $AB = AM + MB = CA + CE$.



Slika 2.

5. Iz $a + b = c + d$ slijedi $(a+b)^2 = (c+d)^2$, pa kako je $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, dobijamo $ab = cd$.

Slijedi da je $a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$, odnosno $(a-b)^2 = (c-d)^2$, pa je $a - b = c - d$ ili $a - b = d - c$.

Ako je $a - b = c - d$, onda iz $a + b = c + d$ dobijamo $a = c$ i $b = d$, pa je $\overline{abcd} = \overline{abab}$.

Ako je $a - b = d - c$, onda iz $a + b = c + d$ dobijamo $a = d$ i $b = c$, pa je $\overline{abcd} = \overline{abba}$.

Dakle, $\overline{abcd} = \overline{abab}$ ili $\overline{abcd} = \overline{abba}$.

Kako je $a \neq 0$, to ako je $a \neq b$ za izbor cifre a imamo 9 mogućnosti i za izbor cifre b različite od a imamo 9 mogućnosti, pa dobijamo $9 \cdot 9$ brojeva obilka $\overline{abab}$, $a \neq b$, i $9 \cdot 9$ brojeva oblika $\overline{abba}$, $a \neq b$. Ako je $a = b$, četvorocifrenih brojeva oblika $\overline{abcd} = \overline{aaaa}$ ima 9, pa je $162 + 9 = 171$ broj četvorocifrenih brojeva sa zadatim svojstvom.