ispitni centar
PRAVA
MJERA
ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2016.

ŠIFRA UČENIKA

OSNOVNA ŠKOLA, IX RAZRED

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA TAKMIČARE

- Vrijeme za rad: **180 minuta.**
- Rješenja zadataka neophodno je **detaljno obrazložiti**. Rješenja koja ne budu sadržala potreban nivo obrazloženja neće biti razmatrana.
- Raspodjela poena:

Zadatak	1.	2.	3.	4.	5.
Maksimalan broj poena	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**

- Pribor za rad: **hemijska olovka.**

SREĆNO!

ZADACI

1. Neka su a, b i c tri različite cifre od kojih nijedna nije jednaka nuli i za koje važi

$$\overline{abc} : c = \overline{bc}$$

Odrediti sve moguće vrijednosti cifara a, b i c.

2. Skup prirodnih brojeva podijeljen je na podskupove

$$\{1,2\},\ \{3,4,5\},\ \{6,7,8,9\},\ \ldots$$

Koji je najmanji elemenat 10000-og podskupa u ovom nizu?

3. Koliko ima prirodnih brojeva n, $10 \le n < 10^6$, djeljivih sa 4, u čijem dekadnom zapisu se ne pojavljuje cifra 0 i nikoje dvije susjedne cifre nijesu jednake?

4. Neka je $ABCD$ pravougli trapez sa osnovicama AB i CD tako da je $AB > CD$ i $DA \perp AB$. Središte kraka BC spojeno je sa tjemenima A i D i pri tome je trapez podijeljen na tri jednakokraka trougla. Odrediti veličinu oštrog ugla trapeza $ABCD$.

5. U pravilnom n-touglu $A_1A_2\ldots A_n$ je $\angle A_3A_1A_4 = 9°$. Koliko dijagonala ima taj mnogougao?

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Dati uslov je ekvivalentan sa $\overline{abc} = \overline{bc} \cdot c$, a odatle slijedi $c \in \{1,5,6\}$. Razmotrićemo 3 slučaja.

(1) Neka je $c = 1$. Tada važi $100a + 10b + 1 = 10b + 1$, a to je nemoguće, jer je $a \neq 0$.

(2) Neka je $c = 5$. Tada važi $100a + 10b + 5 = (10b + 5) \cdot 5$, odnosno $5a = 2b + 1$. Slijedi $a = 1$ i $b = 2$ ili $a = 3$ i $b = 7$.

(3) Neka je $c = 6$. Tada važi $100a + 10b + 6 = (10b + 6) \cdot 6$, odnosno $10a = 5b + 3$, a to je nemoguće.

Dakle, $a = 1$, $b = 2$ i $c = 5$ ili $a = 3$, $b = 7$ i $c = 5$.

2. Prvih 9999 skupova sadrže

$$2 + 3 + \ldots + 10000 = \frac{10000 \cdot 10001}{2} - 1 = 50004999$$

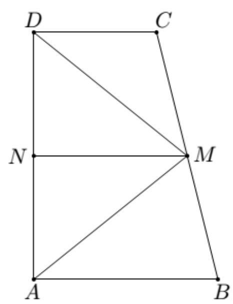
elemenata, pa su u tim skupovima brojevi od 1 do 50004999. Slijedi da je najmanji broj 10000-og podskupa broj 50005000.

3. Dvocifreni završetak broja koji zadovoljava uslove zadatka možemo formirati na 16 načina: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96. Svaku sljedeću cifru možemo odabrati na 8 načina (isključujemo nulu i prethodnu cifru), pa je ukupno traženih brojeva

$$16(1 + 8 + 8 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) = 74896.$$

4. Neka je M središte kraka BC i MN srednja linija trapeza $ABCD$ (slika 1). Tada je $MN \perp AD$, pa je u trouglu AMD visina MN i simetrala stranice AD, iz čega slijedi da je $AM = MD$. Kako je trougao DCM jednakokraki sa tupim uglom $\angle DCM$, to je $DC = CM = MB$. Trougao AMB je jednakokraki i $AB > CD$, to je $AB = AM$.

Slijedi $\angle MAB = 90^\circ - \angle MAD = 90^\circ - \angle MDA = \angle MDC$.



Slika 1.

Neka je $\delta = \angle MDC$. Tada je $\angle DCM = 180^\circ - 2\delta$ i $\angle ABM = \dfrac{180^\circ - \delta}{2}$.

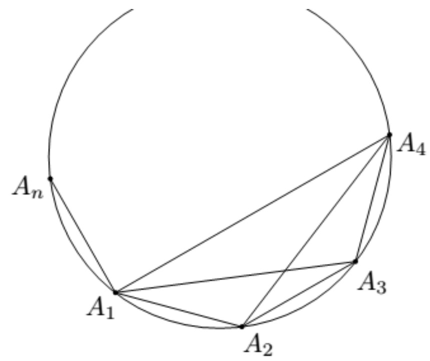
Kako je $\angle DCM + \angle ABM = 180^\circ$, odnosno $180^\circ - 2\delta + \dfrac{180^\circ - \delta}{2} = 180^\circ$,

to dobijamo $\delta = 36^\circ$. Najzad, $\angle ABC = 72^\circ$.

5. Opišimo kružnicu oko pravilnog n-tougla $A_1A_2\ldots A_n$ (slika 2). Uglovi $\angle A_3A_1A_4$ i $\angle A_3A_2A_4$ su periferijski nad lukom A_3A_4, pa je

$$\angle A_3A_2A_4 = \angle A_3A_1A_4 = 9^\circ.$$

Trougao $A_2A_3A_4$ je jednakokraki, pa je $\angle A_2A_3A_4 = 180^\circ - 2\cdot 9^\circ = 162^\circ$. Slijedi da je spoljašnji ugao mnogougla jednak $18^\circ = \dfrac{360^\circ}{n}$, odnosno $n = 20$. Traženi broj dijagonala je jednak $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2} = 170$.



Slika 2.