ispitni centar

PRAVA MJERA ZNANJA

DRŽAVNO TAKMIČENJE 2017.

ŠIFRA UČENIKA

OSNOVNA ŠKOLA, VI RAZRED

MATEMATIKA

UKUPAN BROJ OSVOJENIH BODOVA

Test pregledala/pregledao

....

....

Podgorica, ... 20......... godine

UPUTSTVO ZA RAD

Drage učenice i učenici,

Čestitamo! Uspjeli ste da dođete na državno takmičenje iz matematike i samim tim ste već napravili veliki uspjeh. Zato zadatke koji su pred vama posmatrajte kao interesantne probleme i potrudite se da ih rješavate s punom pažnjom i zalaganjem, ali i sa uživanjem.

Redoslijed izrade zadataka nije bitan. Ako vam je neki zadatak suviše težak, nemojte se na njemu dugo zadržavati, već pređite na sljedeći. Ukoliko vam bude preostalo vremena, vratite se i pokušajte uraditi zadatke koje nijeste rješavali.

Pišite čitko, naročito brojeve!

Radite samostalno. Nijesu dozvoljena nikakva dogovaranja. U slučaju da neko ma na koji način ometa rad, biće udaljen sa takmičenja.

U radu možete koristiti školski pribor za crtanje geometrijskih figura, ali nije dozvoljeno upotreba mobilnih telefona, kalkulatora i bilo kojih drugih elektronskih pomagala.

Za svaki zadatak je predviđeno po 25 bodova.

Za rad imate 180 minuta.

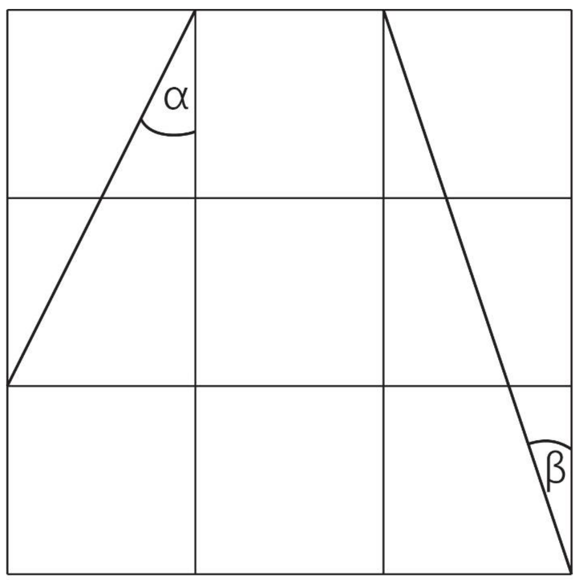
Počnite sa radom. *Srećno!*

1. Tina je 1. juna 2016. godine počela da radi zadatke iz zbirke u kojoj je 360 zadataka. Radila je četiri dana po osam zadatka, a onda dva dana nije radila zadatke, zatim je opet radila četiri dana po osam zadataka, pa odmarala dva dana, i tako redom, dok nije uradila sve zadatke iz zbirke. Mario je 1. jula počeo sa izradom zadataka iz iste zbirke, radeći šest dana po devet zadataka, pa jedan dan odmora, zatim opet šest dana po devet zadataka i dan odmora, i tako redom do kraja zbirke. Ko je prvi uradio sve zadatke iz zbirke?

2. Odrediti sve trojke trocifrenih brojeve (a, b, c) u kojima je $a < b < c$ i $a + b + c = 2017$, ako je poznato da je $NZD(a, c) = 40$, i da je broj b napisan koristeći tri iste cifre.

3. Dvije kutije, u obliku kocke bez poklopca, napravljene su od lima iste debljine. Ivica manje kutije je 1dm, a veće 2dm. Masa veće kutije, kada je prazna, je 1kg. Masa manje kutije napunjene šećerom do tri četvrtine njene visine je takođe 1kg. Koliko grama šećera staje u veću kutiju?

4. Data je mreža od devet kvadrata jednakih stranica u kojoj su povučene dvije duži čiji su krajevi u tjemenima kvadrata kao na slici. Izračunati zbir a+β, gdje su a i β uglovi označeni na slici.



Rješenja:

1. Tina svakih šest dana (četiri dana rada i dva dana pauze) uradi $8 \cdot 4 = 32$ zadataka. Primijetimo da je $360 = 352 + 8 = 32 \cdot 11 + 8$. To znači da je Tina odradila 352 zadatka u jedanaest blokova po šest dana (ukupno $11 \cdot 6 = 66$ dana). Za preostalih 8 zadatka joj je bio potreban još jedan dan. Dakle, Tina je zbirku završila 67. dana rada, tj. 6. Avgusta (30 dana juna + 31 dan jula + 6 dana avgusta).
Mario svakih sedam dana (šest dana rada i dan pauze) uradi $9 \cdot 6 = 54$ zadatka. Primijetimo da je $360 = 324 + 36 = 6 \cdot 54 + 36$. Dakle, Mario je 324 zadatka uradio u šest blokova po sedam dana (ukupno $6 \cdot 7 = 42$ dana), a preostalih 36 zadataka je uradio za tačno četiri dana, tj. ukupno mu je trebalo 46 dana. Dakle, Mario je završio zbirku 15. avgusta (31 dan jula + 15 dana avgusta), tj. poslije Tine.

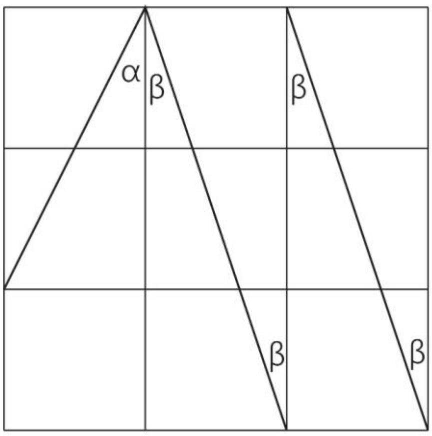
2. Broj b je zapisan koristeći tri iste cifre, pa postoji jednocifren broj k takav da je $b = 111k$. Kako je $NZD(a,c) = 40$ to postoje brojevi m i n takvi da je $a = 40m$ i $b = 40n$ i $NZD(m,n) = 1$. Sada jednakost iz zadatka možemo zapisati kao $40m + 111k + 40n = 2017$, odnosno $40m + 40n = 2017 - 111k$. Broj sa lijeve strane posljednje jednakosti je djeljiv sa 10, pa i broj $2017 - 111k$ mora biti djeljiv sa 10, a to je jedino moguće ako je posljednja cifra broja $111k$ sedmica. Dakle, $k = 7$ i $b = 777$. Iz uslova zadatka je $777 < c < 1000$. Brojevi djeljivi sa 40 između 777 i 1000 su 800, 840, 880, 920 i 960, i oni predstavljaju moguće vrijednosti broja c. Kako je $a + c = 40m + 40n = 2017 - 777 = 1240$ dobijamo sljedeće moguće vrijednosti brojeva a i c, i odgovarajuće vrijednosti brojeva m i n.

a	440	400	360	320	280
c	800	840	860	920	960
m	11	10	9	8	7
n	20	21	22	23	24

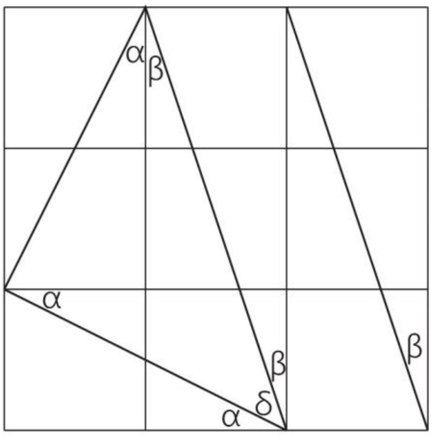
Za svaki od gore navedenih parova (m,n) je očigledno $NZD(m,n) = 1$, pa i za svaki od parova (a,b) važi $NZD(a,b) = 40$. Dakle, postoji pet mogućih traženih trojki i to su: $(440,777,800)$, $(400,777,840)$, $(360,777,860)$, $(320,777,920)$ i $(280,777,960)$.

3. Površina jedne strane veće kutije je $4dm^2$. Kutija ima pet takvih strana (kocka bez poklopca), pa je ukupna površina materijala od kog je napravljena kocka $5 \cdot 4dm^2 = 20dm^2$. Kako je ta kutija teška $1kg$, to znači da je jedan kvadratni decimetar materijala od kog je napravljena kocka težak $1000/20 = 50g$. Površina strane manje kocke je jedan kvadratni decimetar, pa je težina manje kocke (pet strana): $5 \cdot 50g = 250g$. To znači da je težina šećera u manjoj kocki $1000g - 250g = 750g = 0.75kg$ (ukupna masa umanjena za masu same kutije). Zapremina manje kutije je $1dm^3$, pa šećer u kutiji zauzima tri četvrtine te zapremine, tj. $0.75dm^3$. Zaključujemo da je masa $1dm^3$ šećera $1kg$. Zapremina veće kutije je $8dm^3$, pa u nju staje $8kg = 8000g$ šećera.

4. *Rješenje 1:* Za početak uočimo dijagonalu pravougaonika sačinjenog od srednja tri kvadrata, kao na slici 1, i na njoj uglove jednake uglu β. Zatim uočimo duž koja spaja tjemena prethodno učene duži i date kraće duži (slika 2).



Slika 1



Slika 2

Ta duž je, kao i data kraća duž, dijagonala pravougaonika sačinjena od dva susjedna kvadrata date mreže. To znači da su te dvije duži jednake, i da sa ivicama uočenih odgovarajućih pravougaonika obrazuju identične uglove, kao na slici. Primijetimo i da je tako formiran trougao koji je jednakokraki. To znači da su uglovi na osnovici α+β i δ jednaki. Iz donjeg srednjeg kvadrata vidimo da takođe važi i jednakost α+β+δ=90°. Zamjenjujući vrijednost ugla δ sa α+β dobijamo 2α+2β=90°, tj. α+β=45°.

Rješenje 2: Ako uočimo kvadrat stranice jednake manjoj datoj duži i dijagonale jednake većoj datoj duži odmah vidimo da je α+β=45°.