

ISPITNI KATALOG

ŠKOLSKA 2020/2021. GODINE

ANALIZA S ALGEBROM

OSNOVNI I VIŠI NIVO

MATURSKI ISPIT ZA SPECIJALISTIČKO ODJELJENJE
MATEMATIČKE GIMNAZIJE





ISPITNI KATALOG PRIPREMILI:

PROF. DR SINIŠA STAMATOVIĆ

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore

PROF. DR SANJA JANČIĆ RAŠOVIĆ

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore

MR SNEŽANA DELIĆ

JU Gimnazija „Slobodan Škerović”, Podgorica

VIDOSAVA KAŠČELAN

Zavod za školstvo

TATJANA VUJOŠEVIĆ

Ispitni centar



SADRŽAJ

1. UVOD 4

2. PRAVILA 5

3. OPŠTI CILJEVI ISPITA 6

4. STRUKTURA ISPITA 7

5. ISPITNI PROGRAM 9

6. PRIMJER TESTA SA UPUTSTVOM ZA BODOVANJE 16

6.1. Primjer testa 16

6.2. List za odgovore 20

6.3. Rješenja sa uputstvom za bodovanje 21

7. LITERATURA 29

1.

UVOD

Maturalni ispit za učenike specijalističke gimnazije realizovaće se počev od školske 2019/20. godine. Učenici koji su se školovali po programu Matematičke gimnazije, polagaće Analizu sa algebrom kao obavezan nastavni predmet (Zakon o gimnaziji: „Sl. list RCG”, br. 64/2002, 49/2007 i “Službeni list CG”, br. 45/2010, 39/2013 i 47/2017.). Ovim Zakonom (član 38) je precizirano da se ispit iz Analize sa algebrom može polagati na osnovnom ili višem nivou.

Ispitni katalog sadrži sve potrebne informacije o obliku i sadržaju ispita. Navedeni su opšti ciljevi ispita i detaljno je opisana struktura ispita na osnovnom i struktura ispita na višem nivou. Centralni dio kataloga čini Ispitni program koji je zasnovan na predmetnom programu Analiza sa algebrom i koncipiran je tako da se na osnovu ispitnih ciljeva precizno definišu znanja i sposobnosti koje će se provjeravati testom. Sastavni dio kataloga je i primjer testa sa šemom za bodovanje, kao i preporučena literatura.

Ispitni katalog je namijenjen prvenstveno učenicima i nastavnicima.



2.

PRAVILA

Datum sprovođenja ispita iz Analize sa algebrom objavljuje se u okviru školskog kalendara, prije početka školske godine u kojoj se realizuje ispit.

Ispitni materijal se pakuje u sigurnosne vrećice (PVC) i dostavlja školama na dan ispita. Materijal se otvara pred učenicima neposredno prije početka ispita.

Na ispitu nije dozvoljeno sljedeće ponašanje

- lažno predstavljanje
- otvaranje test-knjižice prije dozvoljenog vremena
- ometanje drugih učenika
- prepisivanje od drugog učenika/učenice
- korišćenje nedozvoljenog pribora
- oštećenje šifre na test-knjižici
- nepoštovanje znaka za završetak ispita

Dozvoljen pribor je grafitna olovka, gumica i hemijska olovka.

Tokom ispita **nije dopuštena** upotreba elektronskih uređaja.

Učenikov rad mora biti napisan hemijskom olovkom. Ukoliko se zadatkom traži crtanje, može se koristiti grafitna olovka. Zadatak će se vrednovati sa nula bodova ako je netačan, zaokruženo više ponuđenih odgovora, nečitko i nejasno napisan ili nije riješen.

Nakon ispita, testovi će biti zapakovani i vraćeni u Ispitni centar, gdje će se organizovati ocjenjivanje.

OPŠTI CILJEVI ISPITA

- Provjera znanja i razumijevanja osnovnih pojmova iz predmeta Analiza sa algebrom definisanih nastavnim programom i ovim Katalogom
- Poznavanje osnovnih elemenata teorije brojeva, algebarskih izraza, elementarnih funkcija, jednačina i nejednačina, nizova, diferencijalnog i integralnog računa, kombinatorike i binomne formule
- Provjera primjene pojmova, formula, pravila, tehnika računanja, algoritama i struktura Analize i algebre na konkretnim zadacima, kao i povezanost sa drugim matematičkim pojmovima i disciplinama koje se izučavaju u toku školovanja
- Provjera logičkog mišljenja, izbor odgovarajućih metoda rješavanja zadataka, upoređivanje i upotreba različitih strategija rješavanja zadataka, demonstracija originalnosti i kreativnosti u radu
- Provjera sposobnosti apstraktnog mišljenja i matematičke intuicije
- Uvid u nivo i kvalitet postignuća znanja i vještina iz predmeta Analiza sa algebrom



OSNOVNI NIVO

Ispit traje 150 minuta. Učenici rješavaju test koji čini **15 zadataka**.

Od datih 15 zadataka, prvih pet su zadaci višestrukog izbora, dok su preostali zadaci otvorenog tipa.

Kod **zadataka višestrukog izbora** ponuđeno je više odgovora od kojih je samo jedan tačan. Učenik od ponuđenih odgovora, bira onaj za koji smatra da je tačan. Djelimičnog bodovanja nema. Tačno riješen zadatak donosi 3 boda.

Kod **zadataka otvorenog tipa**, od učenika se traži obrazloženje postupka rješavanja odnosno da dokažu kako su došli do rješenja. Rješenje treba da sadrži sve korake koji vode do rezultata. Prikazani rad se boduje po segmentima, to jest, dodjeljuje se odgovarajući broj bodova za postavku zadatka, tačan postupak rješavanja i tačan rezultat.

Svako tačno rješavanje zadatka nosi maksimalan broj bodova.

VIŠI NIVO

Ispit traje 180 minuta. Učenici rješavaju test sastavljen od 15 zadataka otvorenog tipa.

Prvi dio testa čini deset zadataka zajedničkih sa testom na osnovnom nivou. Rješavanje preostalih pet zadataka zahtijeva dublje razumijevanje ishoda ovog predmeta.

Tabela ispod daje prikaz strukture ispita na osnovnom i na višem nivou.

VRSTA ZADATKA	Broj zadataka <i>samo za osnovni nivo</i>	Broj <i>zajedničkih</i> zadataka za <i>osnovni i viši nivo</i>	Broj zadataka <i>samo za viši nivo</i>
Zadaci višestrukog izbora	5	0	0
Zadaci otvorenog tipa	0	10	5

4. Struktura ispita

Netačno riješen ili neurađen zadatak **ne donosi** negativne bodove.

Sadržaj predmeta Analiza sa algebrom koji se provjerava ispitom, podijeljen je na pet oblasti.

Tabela koja slijedi prikazuje procentualnu zastupljenost oblasti u testu u odnosu na ukupan broj bodova na testu.

REDNI BROJ	OBLAST	ZASTUPLJENOST OBLASTI (u odnosu na ukupan broj bodova na testu)	
		OSNOVNI NIVO	VIŠI NIVO
I	Brojevi	10 ± 5%	15 ± 5%
II	Algebarski izrazi	20 ± 5%	10 ± 5%
III	Elementarne funkcije; Jednačine i nejednačine	30 ± 5%	20 ± 5%
IV	Nizovi; Diferencijalni i integralni račun	40 ± 5%	50 ± 5%
V	Kombinatorika; Binomna formula	10 ± 5%	10 ± 5%



I OBLAST

BROJEVI

	SADRŽAJ	ISPITNI CILJEVI Učenik pokazuje da umije da:
REALNI BROJEVI	Prirodni brojevi; Cijeli brojevi; Djeljivost cijelih brojeva; Prosti brojevi; Faktorizacija prirodnih brojeva; Kongruencije; Racionalni brojevi; Iracionalni brojevi; Apsolutna vrijednost.	<ol style="list-style-type: none">1. odredi ostatak pri dijeljenju prirodnog broja prostim brojem koristeći svojstva kongruencije po modulu2. pomoću rastavljanja datih brojeva na proste faktore odredi NZD i NZS ili provjeri djeljivost jednog broja drugim3. iz datog skupa izdvaja elemente koji su racionalni (iracionalni) brojevi4. odredi kad je zbir, razlika, proizvod, količnik brojeva a i b racionalan (iracionalan)
KOMPLEKSNI BROJEVI	Imaginarna jedinica; Algebarski oblik kompleksnog broja; Modulo i argument kompleksnog broja; Konjugovano kompleksni brojevi; Geometrijsko predstavljanje kompleksnog broja; Računske operacije sa kompleksnim brojevima; Trigonometrijski oblik kompleksnog broja; Moavrove formule: n -ti stepen i n -ti korijen kompleksnog broja, $n \in \mathbb{N}$.	<ol style="list-style-type: none">1. obavlja računске operacije sa kompleksnim brojevima2. rješava jednačine sa kompleksnim brojevima3. rješava zadatke u kojima se u kompleksnoj ravni prepoznaje geometrijsko mjesto tačaka - kompleksnih brojeva jednako udaljenih od dvije zadate tačke - dva kompleksna broja i geometrijsko mjesto tačaka udaljenih r od zadate tačke - kompleksnog broja3. računa n-ti stepen i korijen kompleksnog broja

5

ISPITNI PROGRAM

II OBLAST ALGEBARSKI IZRAZI

	SADRŽAJ	ISPITNI CILJEVI Učenik pokazuje da umije da:
RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI	Algebarski razlomci.	<ol style="list-style-type: none"> 1. odredi oblast definisanosti algebarskog razlomka 2. transformiše izraze sa algebarskim razlomcima
STEPENOVANJE I KORJENOVANJE	Osnovne operacije sa stepenima čiji je izložilac cio broj; Stepena funkcija; Operacije sa korijenima; Racionalisanje; Korjena funkcija; Operacije sa stepenima čiji je izložilac racionalan broj.	<ol style="list-style-type: none"> 1. primijeni postupak racionalisanja 2. koristi svojstva stepenovanja i korjenovanja
POLINOMI	Dijeljenje polinoma; Teorema o jednakosti dva polinoma; Teorema o faktorizaciji polinoma na linearne i kvadratne faktore; Tvđenje: ako je nula polinoma kompleksni broj tada je nula i odgovarajući konjugovano kompleksni broj; Faktorizacija polinoma; NZD i NZS polinoma; Zapisivanje polinoma pomoću djelioca, količnika i ostatka; Vietove formule.	<ol style="list-style-type: none"> 1. podijeli dva polinoma 2. faktoriše polinom u slučajevima kada se neka nula ili više nula nalaze neposrednom provjerom 3. nađe NZD i NZS polinoma nakon sprovedene faktorizacije 4. riješi zadatke u kojima se traži nepoznati ostatak dijeljenja 5. odredi nepoznate koeficijente polinoma uz informaciju da je polinom djeljiv nekim zadatim polinomom 6. riješi zadatke u kojima se nepoznati koeficijenti dobijaju primjenom Vietovih formula

III OBLAST

ELEMENTARNE FUNKCIJE; JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

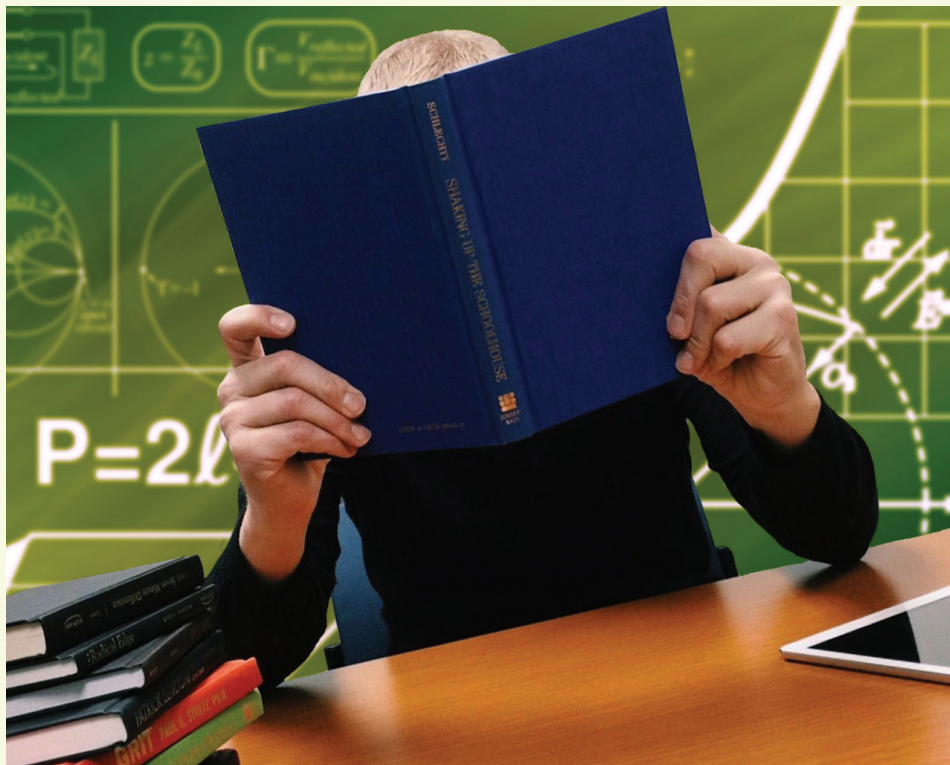
	SADRŽAJ	ISPITNI CILJEVI Učenik pokazuje da umije da:
LINEARNE JEDNAČINE, NEJEDNAČINE I FUNKCIJE	Linearna funkcija; Linearna jednačina i nejednačina; Sistem linearnih jednačina; Gausov metod rješavanja jednačina.	<ol style="list-style-type: none">1. riješi linearnu jednačinu2. riješi linearnu nejednačinu3. riješi linearne jednačine (nejednačine) u kojima koristi definiciju apsolutne vrijednosti4. riješi sistem linearnih jednačina sa dvije i tri nepoznate5. diskutuje sistem linearnih jednačina sa dvije i tri nepoznate6. crta grafik linearne funkcije7. na osnovu zadatih podataka odredi linearnu funkciju8. primijeni linearne jednačine, nejednačine i njihove sisteme u modelovanju situacija iz svakodnevnog života
KVADRATNA JEDNAČINA I FUNKCIJA	Kvadratna jednačina i nejednačina; Osobine i grafik kvadratne funkcije; Sistem od jedne linearne i jedne kvadratne jednačine; Sistem od dvije kvadratne jednačine.	<ol style="list-style-type: none">1. riješi kvadratnu jednačinu sa realnim koeficijentima2. riješi jednačine koje se svode na kvadratne3. diskutuje prirodu rješenja kvadratne jednačine4. poznaje Vietove formule i primjenjuje ih5. modelira realne probleme i rješava ih primjenom kvadratne jednačine6. riješi sistem jedne linearne i jedne kvadratne jednačine, kao i sistem od dvije kvadratne jednačine7. ispita tok i nacrtava grafik kvadratne funkcije8. na osnovu datih elemenata odredi kvadratnu funkciju9. riješi kvadratnu nejednačinu10. riješi zadatke koji se svode na rješavanje kvadratne jednačine i nejednačine, i na traženje ekstremne vrijednosti kvadratne funkcije

5. Ispitni program

EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Eksponencijalna funkcija
 $f(x) = a^x$, $0 < a$, $a < 1$, $a > 1$;
Osobine i grafik
eksponencijalne funkcije;
Eksponencijalna jednačina i
nejednačina;
Pojam logaritma;
Logaritamska funkcija
 $f(x) = \log_a x$, $0 < a$, $a < 1$, $a > 1$;
Osobine i grafik logaritamske
funkcije;
Pravila logaritmovanja;
Logaritamska jednačina i
nejednačina.

10. prepozna i nacrtta grafik elementarne
eksponencijalne i logaritamske
funkcije
11. analizira svojstva eksponencijalne i
logaritamske funkcije
12. prepozna i primijeni osnovna pravila
logaritmovanja
13. riješi eksponencijalne i logaritamske
jednačine
14. riješi eksponencijalne i logaritamske
nejednačine



IV OBLAST

NIZOVI;

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN

	SADRŽAJ	ISPITNI CILJEVI Učenik pokazuje da umije da:
NIZOVI	<p>Aritmetički niz; Suma n uzastopnih članova aritmetičkog niza; Geometrijski niz; Suma n uzastopnih članova geometrijskog niza; Granična vrijednost sume n uzastopnih članova geometrijskog niza, $q < 1$, tj. suma beskonačno mnogo uzastopnih članova geometrijskog niza. Osnovni pojmovi o nizovima (definicija, zadavanje, monotonost, ograničenost, operacije); Granična vrijednost niza; Osnovne teoreme o graničnim vrijednostima zbira, razlike, proizvoda i količnika nizova; Teorema o konvergenciji monotonog i ograničenog niza; Broj e; Geometrijski red.</p>	<ol style="list-style-type: none">1. riješi zadatke u kojima se koriste definicije aritmetičkog i geometrijskog niza kao i vrijednosti njihovih suma uključujući sumu beskonačno mnogo uzastopnih članova geometrijskog niza2. primijeni osnovne teoreme o graničnim vrijednostima zbira, razlike, proizvoda i količnika nizova kao i teoremu o konvergenciji monotonog i ograničenog niza3. prepozna geometrijski red, nađe sumu reda
REALNE FUNKCIJE JEDNE PROMJENLJIVE	<p>Pojam funkcije; Način zadavanja funkcije; Pojam bijekcije; Složena funkcija; Inverzna funkcija; Domen, kodomen funkcije; Parnost i neparnost funkcije; Periodičnost funkcije, znak funkcije; Pojam granične vrijednosti funkcije; Osnovna svojstva granične vrijednosti funkcije; Lijeva i desna granična vrijednost funkcije; Značajnije granične vrijednosti funkcija; Asimptote; Pojam neprekidnosti funkcije.</p>	<ol style="list-style-type: none">1. odredi vrijednost funkcije koja je zadata tablično, grafički ili analitički2. odredi i predstavi inverznu funkciju u konkretnim primjerima3. odredi domen, ispita monotonost, znak, konveksnost; odredi ekstremne vrijednosti funkcije4. ispita parnost (neparnost) funkcije, odredi osnovni period ukoliko postoji5. računa granične vrijednosti funkcija6. odredi asimptote grafika funkcije7. utvrdi da li je data funkcija neprekidna ili ima prekid i određuje vrstu prekida8. dodefiniše funkciju tako da bude neprekidna u datoj tački

5. Ispitni program

DIFERENCIJALNI RAČUN	Pojam izvoda; Izvod zbira, proizvoda i količnika; Izvod elementarnih funkcija; Izvod složene funkcije; Izvod funkcije date u implicitnom obliku; Izvodi višeg reda; Lopitalovo pravilo; Maklorenova formula; Ispitivanje funkcije i crtanje grafika.	<ol style="list-style-type: none">1. računa izvode2. riješi ekstremalne zadatke primjenom diferencijalnog računa3. primijeni Lopitalovo pravilo i Maklorenovu formulu4. primijeni diferencijalni račun pri ispitivanju osobina funkcije
NEODREĐENI INTEGRAL	Pojam primitivne funkcije i neodređenog integrala; Svojstva neodređenog integrala; Tablica osnovnih integrala; Metod smjene; Metod parcijalne integracije; Integrali racionalnih, iracionalnih i trigonometrijskih funkcija.	<ol style="list-style-type: none">1. riješi integrale primjenjujući osobine integrala i tablicu integrala2. primijeni metod smjene3. primijeni metod parcijalne integracije4. odredi integral racionalnih funkcija5. odredi integral nekih iracionalnih funkcija6. odredi integral trigonometrijskih funkcija
ODREĐENI INTEGRAL	Geometrijska interpretacija određenog integrala; Svojstva određenog integrala; Njutn-Lajbnicova formula; Pojam nesvojstvenog integrala; Računanje površine figura u ravni primjenom određenog integrala; Računanje dužine luka krive; Računanje površine i zapremine rotacionih tijela.	<ol style="list-style-type: none">1. primijeni Njutn - Lajbnicovu formulu2. riješi određeni integral3. računa površinu figura u ravni primjenom određenog integrala4. računa dužinu luka krive5. računa površinu i zapreminu rotacionih tijela6. primijeni parcijalnu integraciju i smjenu promjenljive na nesvojstveni integral

V OBLAST

KOMBINATORIKA; BINOMNA FORMULA

	SADRŽAJ	ISPITNI CILJEVI Učenik pokazuje da umije da:
KOMBINATORIKA; BINOMNA FORMULA	Pravilo proizvoda. Varijacije, permutacije i kombinacije bez ponavljanja. Varijacije, kombinacije i permutacije sa ponavljanjem. Formula uključenja-isključenja. Binomna formula. Zbir binomnih koeficijenta.	<ol style="list-style-type: none">1. riješi zadatke u kojima se primjenjuje pravilo proizvoda2. u zadacima prepoznaje modele u kojima se pojavljuju varijacije, permutacije i kombinacije bez i sa ponavljanjem i primjenjuje formule za njihovo prebrojavanje3. riješi zadatke u kojima se primjenjuje formula uključenja-isključenja4. nađe konkretan član u binomnom razvoju5. nađe koeficijent uz konkretan član u binomnom razvoju6. nađe član u binomnom razvoju koji je jednak konstanti7. odredi broj racionalnih-iracionalnih članova u binomnom razvoju8. riješi zadatke u kojima na osnovu podataka vezanih za neke koeficijente u binomnom razvoju nalazi n



PRIMJER TESTA SA
UPUTSTVOM ZA
BODOVANJE ■

6

16

PRVIH PET ZADATAKA ODGOVARA SAMO PRIMJERU
TESTA NA OSNOVNOM NIVOU

U SLJEDEĆIM ZADACIMA ZAOKRUŽITE
SLOVO ISPRED TAČNOG ODGOVORA.

1. Vrijednost izraza $\left(\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} \right)^2$,
($a > 0, a \neq 1, \frac{3}{2}$) je:

- A. 9
- B. $2a$
- C. $9a$
- D. $\frac{1}{2a-3}$

3 boda

2. Ako je $b = \frac{a^3 - \frac{1}{a^3}}{a^3 + \frac{1}{a^3}}$ i $c = \frac{a^6 - \frac{1}{a^6}}{a^6 + \frac{1}{a^6}}$, $a \neq 0, a \neq \pm 1$, tada je
 c izraženo u funkciji od b jednako:

- A. $\frac{2b}{b^2+1}$
- B. $-\frac{2b}{b^2+1}$
- C. $\frac{b^2+1}{2b}$
- D. $-\frac{b^2+1}{2b}$

3 boda

3. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$, $stP(x) \geq 2$, sa $x - 1$ je 3, a ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ sa $x + 1$ je -1 . Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ sa $x^2 - 1$ je:

- A. $2x - 1$
- B. $2x + 1$
- C. $x - 1$
- D. 6

3 boda

4. Data je funkcija: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ je paran broj} \\ \frac{1}{2}(x-3), & x \text{ je neparan broj} \end{cases}$.
Kolika je vrijednost izraza $f(f(17)+1)$?

- A. 49
- B. 64
- C. 143
- D. 197

3 boda

5. Na svakoj stranici jednakostraničnog trougla zadato je po 10 tačaka različitih od tjemena trougla. Koliko ima trouglova čija su tjemena zadate tačke?

- A. 3500
- B. 3600
- C. 3700
- D. 3800

3 boda

SLJEDEĆIH DESET ZADATAKA SU ZAJEDNIČKI ZADACI ZA TEST NA OSNOVNOM I ZA TEST NA VIŠEM NIVOU

ZADATKE KOJI SLIJEDE RJEŠAVAJTE POSTUPNO.

6. Dati su skupovi $A = \{z \in C : |z - 1 - i| = |z + 1 + i|\}$ i $B = \{z \in C : |z - 2 - 2i| \leq 1\}$.

Naći minimum izraza $|z_1 - z_2|$, $z_1 \in A$, $z_2 \in B$.

3 boda

7. Data je jednačina $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$. Odrediti vrijednost realnog parametra a za koje je jedno rješenje jednačine dva puta veće od drugog.

3 boda

8. Za koje vrijednosti parametra m jednačina $|x^2 - 2x - 3| = m$ ima najveći broj rješenja?

3 boda

9. Riješiti nejednačinu $(1, 25)^{1-x} < (0, 64)^{2(1+\sqrt{x})}$.

3 boda

10. Zadati su brojevi q i Q , $|q| < 1$, $|Q| < 1$.

Sumu $W = 1 + qQ + q^2Q^2 + q^3Q^3 + \dots$ izraziti preko s i S gdje je $s = 1 + q + q^2 + \dots$, $S = 1 + Q + Q^2 + \dots$

3 boda

11. Odrediti oblast definisanosti funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \log_{2x+3} x^2}}$. *4 boda*

12. Naći funkciju $f(x)$ za koju važi:
 $f\left(\frac{x-1}{x+2}\right) + 2f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 2x - 1, x \neq 1, x \neq -2.$ *3 boda*

13. U datu elipsu čija je jednačina $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ upisati pravougaonik najveće površine. *5 bodova*

14. Izračunati $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x - 4 \ln x}}$. *4 boda*

15. Zbir binomnih koeficijenata trećeg člana od početka i trećeg člana od kraja u razvijenom obliku stepena binoma $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ iznosi 9 900. Naći broj racionalnih članova u razvoju. *4 boda*

PET ZADATAKA KOJI SLIJEDE RJEŠAVAJU SAMO UČENICI KOJI SU IZABRALI DA POLAŽU ISPIT NA VIŠEM NIVOU

- 16.** Odrediti tri prosta broja čiji je proizvod sedam puta veći od njihovog zbira.

3 boda

- 17.** Naći ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = x^n \sin \alpha - x \sin n\alpha$ sa polinomom $Q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in Z$.

3 boda

- 18.** Odrediti parametar a i dodefinisati funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a \ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}, & x < 0 \end{cases}$$

tako da bude neprekidna za $x = 0$.

4 boda

- 19.** Naći brojeve a , b , c za koje važi

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow +\infty$$

Naći kosu asimptotu funkcije $f(x)$ za $x \rightarrow +\infty$.

3 boda

- 20.** Koliko ima sedmocifrenih brojeva čiji je decimalni zapis $abcdefg$, cifre a, b, c, d, e, f, g su neparni brojevi za koje važi $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f \leq g$?

3 boda

Učenci koji polažu ispit na osnovnom nivou, uz test dobijaju i list za upisivanje odgovora na zadatke višestrukog izbora.

Potrebno je da se za svaki od prvih pet zadataka, na odgovarajuće mjesto pažljivo prepisu dobijeni odgovori.



LIST ZA ODGOVORE

Analiza sa algebrom

Uputstvo za označavanje tačnog odgovora:



Pravilno



Nepravilno

Ako pogriješite, to polje označite ovako: ■
a željeni odgovor po gore navedenom pravilu

Zadatak će se vrednovati sa 0 bodova:

- ako je označen netačan odgovor
- ako je označeno više odgovora
- ako nije označen nijedan odgovor

OVDJE

zalijepiti šifru učenika

A. B. C. D.

1.

A. B. C. D.

2.

A. B. C. D.

3.

A. B. C. D.

4.

A. B. C. D.

5.



RJEŠENJA SA UPUTSTVOM ZA BODOVANJE

1. Tačan odgovor: C

$$\begin{aligned} \left(\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 &= \left(\frac{4a - \frac{9}{a}}{2\sqrt{a} - \frac{3}{\sqrt{a}}} + \frac{a - 4 + \frac{3}{a}}{\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}} \right)^2 = \\ \left(\frac{4a^2 - 9}{(2a - 3)\sqrt{a}} + \frac{a^2 - 4a + 3}{(a - 1)\sqrt{a}} \right)^2 &= \\ \left(\frac{(2a - 3)(2a + 3)}{(2a - 3)\sqrt{a}} + \frac{(a - 1)(a - 3)}{(a - 1)\sqrt{a}} \right)^2 &= \\ \left(\frac{2a + 3 + a - 3}{\sqrt{a}} \right)^2 &= (3\sqrt{a})^2 = 9a \end{aligned}$$

2. Tačan odgovor: A

$$\begin{aligned} b = \frac{a^3 - \frac{1}{a^3}}{a^3 + \frac{1}{a^3}} = \frac{a^6 - 1}{a^6 + 1} &\Rightarrow a^6 b + b = a^6 - 1 \Rightarrow a^6 = \frac{1 + b}{1 - b} \\ c = \frac{a^6 - \frac{1}{a^6}}{a^6 + \frac{1}{a^6}} = \frac{a^{12} - 1}{a^{12} + 1} &= \frac{\left(\frac{1 + b}{1 - b}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1 + b}{1 - b}\right)^2 + 1} \\ c = \frac{(1 + b)^2 - (1 - b)^2}{(1 + b)^2 + (1 - b)^2} &= \frac{2b}{b^2 + 1} \end{aligned}$$

3. Tačan odgovor: B

Na osnovu Bezuove teoreme imamo $P(1) = 3, P(-1) = -1$.

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b \Rightarrow P(1) = a + b = 3, P(-1) = -a + b = -1 \Rightarrow a = 2, b = 1$$

4. Tačan odgovor: B

$$f(17) = \frac{1}{2}(17 - 3) = 7$$

$$f(f(17) + 1) = f(8) = 64$$

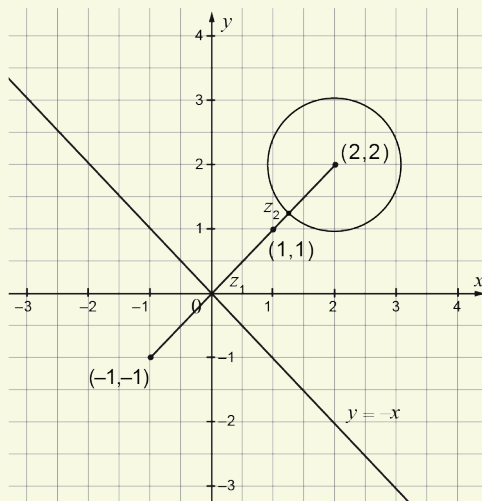
5. Tačan odgovor: C

Sve trojke zadatih tačaka, ima ih $\binom{30}{3}$, osim trojki tačaka koje se

nalaze na nekoj stranici, ima ih $3\binom{10}{3}$, obrazuju trougao. Dakle,

$$\text{traženi broj je } \binom{30}{3} - 3\binom{10}{3} = 3700$$

6.



Skup A je geometrijsko mjesto tačaka koje su u kompleksnoj ravni jednako udaljene od tačaka $(-1, -1)$ i $(1, 1)$, tj. prava $y = -x$ 1 bod

Skup B je krug sa centrom u tački $(2, 2)$ i poluprečnika 1 1 bod

Traženi minimum je $d((0, 0), (2, 2)) - 1 = 2\sqrt{2} - 1$ (d je rastojanje između tačaka) i dostiže se za $z_1 = 0, z_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$ 1 bod

7.

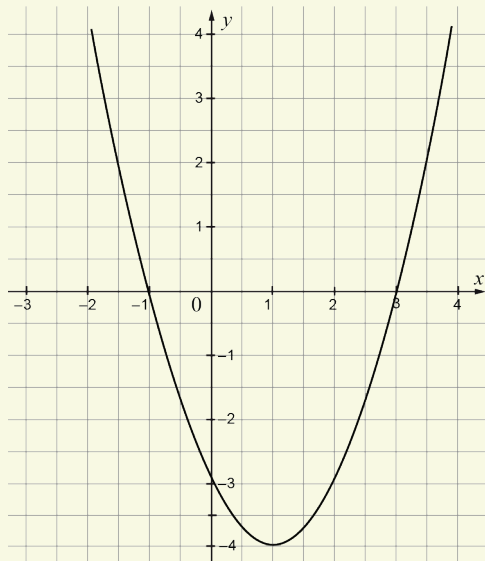
$$x_1 = 2x_2, \quad x_1 + x_2 = 1 - 2a, \quad x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$3x_2 = 1 - 2a, \quad 2x_2^2 = a^2 + 2$$

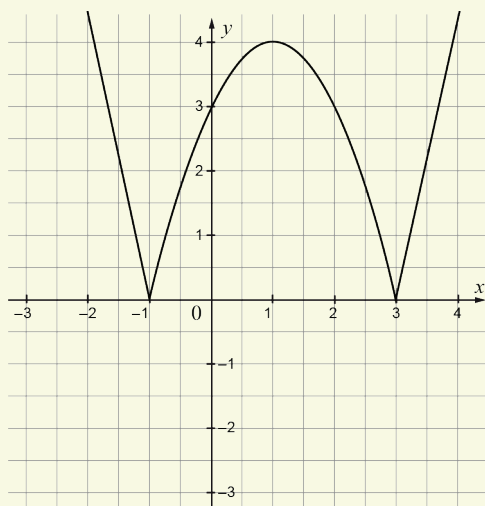
$$\left(\frac{1 - 2a}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + 2}{2} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$a^2 + 8a + 16 = 0 \Rightarrow (a + 4)^2 = 0 \Rightarrow a = -4 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

8.



1 bod



1 bod

Prava $y = m$ za:

$m > 4$ siječe grafik u dvjema tačkama

$m = 4$ siječe grafik u tri tačke

$m \in (0, 4)$ siječe grafik u četiri tačke

$m = 0$ siječe grafik u dvjema tačkama

$m < 0$ presjeka nema.

Dakle, $m \in (0, 4)$ 1 bod

9.

$$(1, 25)^{1-x} < (0, 64)^{2(1+\sqrt{x})} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{5}{4}\right)^{-4(1+\sqrt{x})}, x \geq 0 \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$1 - x < -4(1 + \sqrt{x})$$

$$x - 4\sqrt{x} - 5 > 0$$

Smjena: $\sqrt{x} = t, t \geq 0, t^2 - 4t - 5 > 0$ 1 bod

$$(t < -1 \vee t > 5) \wedge (t \geq 0)$$

$$t > 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 5 \Leftrightarrow x > 25 \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

10.

$$s = \frac{1}{1-q}, S = \frac{1}{1-Q} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$q = \frac{s-1}{s}, Q = \frac{S-1}{S} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$W = \frac{1}{1-qQ} = \frac{sS}{s+S-1} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

11.

Rješava se nejednačina $\log_{2x+3} x^2 < 1$ uz uslove $x \neq 0$, $x > -\frac{3}{2}$, $x \neq -1$ 1 bod

Treba razmatrati slučajeve $0 < 2x+3 < 1$ i $2x+3 > 1$

1. Ako je $0 < 2x+3 < 1$, tj. $-\frac{3}{2} < x < -1$ imamo nejednačinu

$$x^2 > 2x+3 \text{ pa je } x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \text{ i } x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right),$$

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

2. Ako je $2x+3 > 1$, tj. $x > -1$ uz uslov $x \neq 0$ imamo nejednačinu

$$x^2 < 2x+3 \text{ pa je}$$

$$x \in (-1, 3) \cap (-1, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-1, 3), x \neq 0$$

$$x \in (-1, 0) \cup (0, 3) \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$\text{slijedi } x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 3) \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

12.

$$u = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \Rightarrow u \neq 0, u \neq 1$$

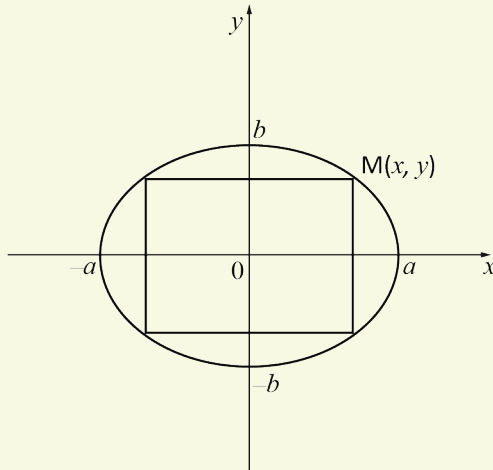
$$ux + 2u = x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2u+1}{1-u} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$\text{Postavka sistema } \begin{cases} f(u) + 2f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{5u+1}{1-u} \\ 2f(u) + f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{u+5}{u-1} \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

Rješavanjem sistema se dobija

$$-3f(u) = \frac{5u+1}{1-u} + \frac{2u+10}{1-u} = \frac{7u+11}{1-u} \Rightarrow f(u) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7u+11}{u-1} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

13.



Neka je $M(x, y)$ tjeme pravougaonika na luku elipse u prvom kvadrantu. Tada je površina pravougaonika $P = 2x \cdot 2y = 4xy$

Kako je iz jednačine elipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, to je $P = \frac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$... 1 bod

$$P' = \frac{4b(a^2 - 2x^2)}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$P' = 0 \text{ za } x = \frac{a}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$P''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) < 0 \Rightarrow P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = P_{\max} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

za $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ dobijamo $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, pa je pravougaonik $MMPQ$,

gdje je $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$,

$$N\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), P\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right), Q\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

pravougaonik najveće površine upisan u datu elipsu 1 bod

14.

Smjena: $\ln x = t, \frac{dx}{x} = dt$ 1 bod

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2-4t}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{5-(t+2)^2}}, (t+2 = m, dt = dm) \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$\int \frac{(m-2)dm}{\sqrt{5-m^2}} = \int \frac{mdm}{\sqrt{5-m^2}} - 2 \int \frac{dm}{\sqrt{5-m^2}} = -\sqrt{5-m^2} - 2 \arcsin \frac{m}{\sqrt{5}} + C \text{ .1bod}$$

$$-\sqrt{5-(t+2)^2} - 2 \arcsin \frac{t+2}{\sqrt{5}} + C = -\sqrt{5-(\ln x + 2)^2} - 2 \arcsin \frac{\ln x + 2}{\sqrt{5}} + C$$

1 bod

15.

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} = 9900 \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$2 \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) = 100 \cdot 99 \Rightarrow n = 100 \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^{\frac{100-k}{4}} \cdot 4^{\frac{k}{3}} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^{25-\frac{k}{4}} \cdot 4^{\frac{k}{3}} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

Broj u razvoju je racionalan ako i samo ako je broj k djeljiv sa 3 i sa 4 tj. djeljiv sa 12.

Ti brojevi su 0, 12, 24, ..., 96 i ima ih 9 1 bod

16.

Označimo tražene brojeve sa a , b , c .

Iz traženog uslova imamo $abc = 7(a + b + c)$.

Budući da je 7 prost broj, jedan od traženih brojeva, recimo c ,

mora biti 7..... 1 bod

Nakon uvrštavanja $c = 7$ dobijamo

$$ab = a + b + 7 \Leftrightarrow a(b - 1) = b - 1 + 8 \Leftrightarrow a = 1 + \frac{8}{b - 1} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$b = 2, a = 9; b = 3, a = 5; b = 5, a = 3;$$

Traženi brojevi su 3, 5, 7 1 bod

17.

Nule polinoma $Q(x)$ su $x_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ i $x_2 = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$... 1 bod

$$P(x) = Q(x)P_1(x) + ax + b$$

$$P(x_1) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \sin \alpha - (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sin n\alpha =$$

$$(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \sin \alpha - (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sin n\alpha = \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$= -\sin(n-1)\alpha = a \cos \alpha + ia \sin \alpha + b \Rightarrow a = 0, b = -\sin(n-1)\alpha$$

Traženi ostatak je $-\sin(n-1)\alpha$ 1 bod

18.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} = a \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} \cdot \frac{\sin x}{x} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

Funkcija je neprekidna u

$$x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}, & x < 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ bod}$$

19.

$$f(x) = x \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{\frac{1}{3}} = x \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \frac{9}{x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right), x \rightarrow +\infty$$

Dakle, $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ 2 boda

Tražena kosa asimptota je $y = x - 1$
i grafik funkcije joj se približava odozdo 1 bod

20.

Broj koji tražimo jednak je broju 7 – kombinacija sa ponavljanjem skupa
neparnih brojeva 1 bod

tj. $\binom{7+5-1}{5-1}$ 1 bod

$\binom{11}{4} = 330$ 1 bod

OSNOVNA LITERATURA

1. Udžbenik sa zbirkom zadataka za I razred Matematičke gimnazije (Arif Zolić, Zoran Kaldeburg, Srđan Ognjanović)
2. Udžbenik sa zbirkom zadataka za II razred Matematičke gimnazije (Srđan Ognjanović, Vladimir Mičić, Zoran Kaldeburg)
3. Udžbenik sa zbirkom zadataka za III razred Matematičke gimnazije (Zoran Kaldeburg, Vladimir Mičić, Srđan Ognjanović)
4. Udžbenik sa zbirkom zadataka za IV razred Matematičke gimnazije (Zoran Kaldeburg, Vladimir Mičić, Srđan Ognjanović)

Izdavač: Krug, Beograd



7

LITERATURA ■

